Lineaire algebra en analytische meetkunde

John Val

February 14, 2015

Inhoud

Inhoud

1 Inleiding

De lineaire algebra houdt zich bezig met rekenen aan systemen waarin de variabelen alleen tot de eerste macht voorkomen. Meetkundig gezien gaat het dan onder andere over het rekenen met punten, lijnen en vlakken. Je berekent dan snijpunten door het oplossen van lineaire vergelijkingen. In de analytische meetkunde komt daar nog bij het bepalen van snijlijnen, hoeken en lengten. Eerst zullen we een aantal bekende begrippen voor het platte vlak herhalen. Daarna doen we het dunnetjes over in drie dimensies en hoger.

Vervolgens beschouwen de menselijke waarneming van de ruimte het zogenoemde perspectief. Echt evenwijdige lijnen zoals bijvoorbeeld een recht stuk treinspoor neemt ons brein waar als een steeds smaller wordend terwijl de trein er toch echt overal overal over kan rijden. De wiskunde heeft ook gereedschap ontwikkeld om hier aan te kunnen rekenen.

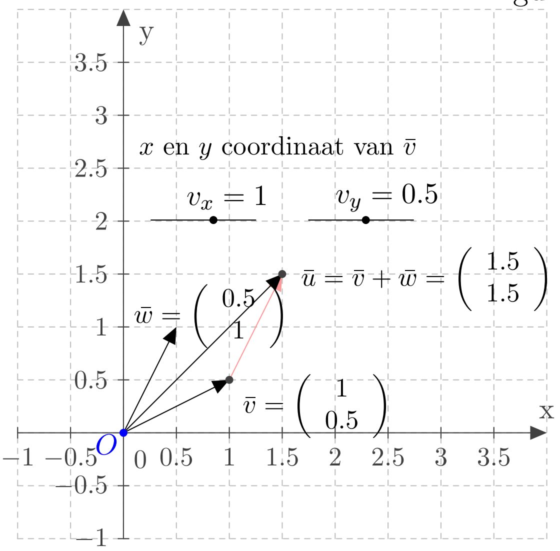
Als laatste bekijken we ook niet lineaire verbanden zoals cirkels, parabolen en hyperbolen die allen een kegelsnede zijn. Termen als raaklijnen en poollijnen worden behandeld.

2 coördinaten in $\mathbb{R}^2$

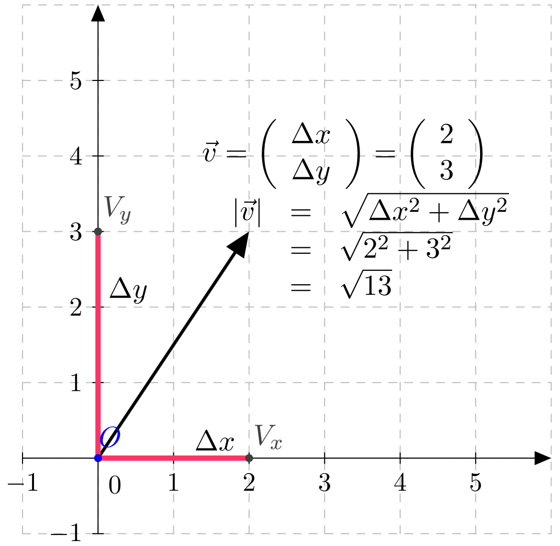
2.1 coördinatenstelsel

In een vlak kunnen we een assenstelsel kiezen. Gewoonlijk wordt een assenstelsel gekozen waarin de y-as (verticaal) loodrecht op de x-as (horizontaal) wordt gezet. Het snijpunt van de twee assen noemt men de oorsprong. Op iedere as wordt vervolgens een lengte-eenheid gekozen. Een assenstelsel voorzien van eenheden noemt men een coördinatenstelsel. Staan de assen bovendien loodrecht op elkaar dan noemen we een dergelijk assenstelsel een cartesisch-assenstelsel. Als bovendien de lengte van de eenheden gelijk zijn aan één dan spreekt men van een orthonormaal-assenstelsel.

Figure 1: applets



vectoren optellen Open vectoroptellen.ggb



vector en lengte Open assenstelsel2d.ggb

2.2 Punt

Een punt P wordt gedefiniëerd als een paar getallen (x, y) in het coördinatenstelsel. Dit punt bereik je op door vanuit de oorsprong x eenheden over de x-as te bewegen en vervolgens y eenheden parallel aan de y-as te bewegen.

2.3 Vector en vectorruimte

Een vector $\vec{v}$ wordt gedefiniëerd als een paar getallen $(\Delta x, \Delta y)$.
Notatie $\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
Een vector geeft een verplaatsing aan van een punt A naar een punt B. Zonder gegeven beginpunt wordt een vector getekend als een pijl vanuit de oorsprong naar het punt $(\Delta x, \Delta y)$. De vector $\vec{AB}$ van een punt $A = (x_A, y_A)$ naar $B = (x_B, y_B)$ wordt gegeven door:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Gegeven twee punten $A = (1, 2)$ en $B = (3, 1)$ dan is de vector van A naar B:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In de lineaire algebra komt het vaak voor dat een punt ook als vector wordt gegeven. Men bedoelt dan dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ met beginpunt in de oorsprong als eindpunt het punt (a, b) heeft. De coördinaten zijn voor beiden het zelfde. In deze text zal dat ook regelmatig gebeuren. Echter een vector geeft in principe een verplaatsing weer terwijl een punt een statisch begrip is. Als je een vector ziet als proces dat is geweest dan is het proces op het eindpunt van de vector aangekomen. In het rekenen met coördinaten is er voor beide begrippen geen verschil en is het gemakkelijker om de begrippen als elkaars gelijke te hanteren.

2.3.1 optellen vectoren

Gegeven zijn de punten $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ en $C = (4, 4)$. Teken deze punten in geogebra en bepaal de vectoren $\vec{AB}, \vec{BC}$ en $\vec{AC}$. Teken ook deze vectoren. Wat is de relatie tussen $\vec{AB}, \vec{BC}$ en $\vec{AC}$?

De som van twee vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ en $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ is gedefiniëerd als

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Meetkundig gezien is een vector optelling het plakken van een vector aan een andere volgens de kop staart methode.

Voorbeeld

Gegeven : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan is $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Opgaven:

1. Gegeven: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bereken $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{w} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (antwoord op http://www.wolframalpha.com)
2. Bewijs de **commutatieve eigenschap**:Gegeven de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ dan is $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
3. Bewijs de **associatieve eigenschap**: Gegeven de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dan is $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
4. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.3.2 scalaire vermenigvuldiging vectoren

Opdracht: Gegeven is het punt $A = (1, 2)$ en de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bereken $A + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$ en $A + \vec{u}$. Wat is de relatie tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$?

Het product van een vector met $\vec{v}$ een getal a ofwel **scalaire vermenigvuldiging** is gedefiniëerd als

$$a \cdot \vec{v} = a \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_x \\ av_y \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Gegegeven : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $a = 2$ dan is $a\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Opgaven:

5. Gegeven: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Bereken $2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $-1\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u} + 2\vec{v}$.
6. Bewijs de **identiteit eigenschap**: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
7. Bewijs de **distributieve eigenschap**: Gegeven de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en getal a dan is $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
8. Bewijs de **commutatieve eigenschap** $(a \cdot b)\vec{u} = a(b\vec{u})$ voor willekeurige getallen a en b.
9. Bewijs de **inverse eigenschap optellen**: Gegeven de vector $\vec{u}$ dan bestaat er een inverse $-\vec{u}$ waarvoor geldt $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

2.3.3 vectorruimte

Het optellen van vectoren samen met scalaire vermenigvuldiging lijken een ruimte vast te leggen. Het wiskundige begrip **vectorruimte** wordt gebruikt om dit wiskundige manier te beschrijven.

Een **vectorruimte** is een verzameling V van vectoren samen met de bewerkingen optellen van vectoren samen en scalaire vermenigvuldiging die aan de volgende condities voldoet.

- Als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in V zitten, dan zitten $\vec{u} + \vec{v}$ en $a\vec{u}$ dat ook voor ieder getal a.
- Er is een *nul vector* $\vec{0}$ zodanig dat $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. Iedere $\vec{u}$ heeft een inverse (tegengestelde) $-\vec{u}$ zodanig dat $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

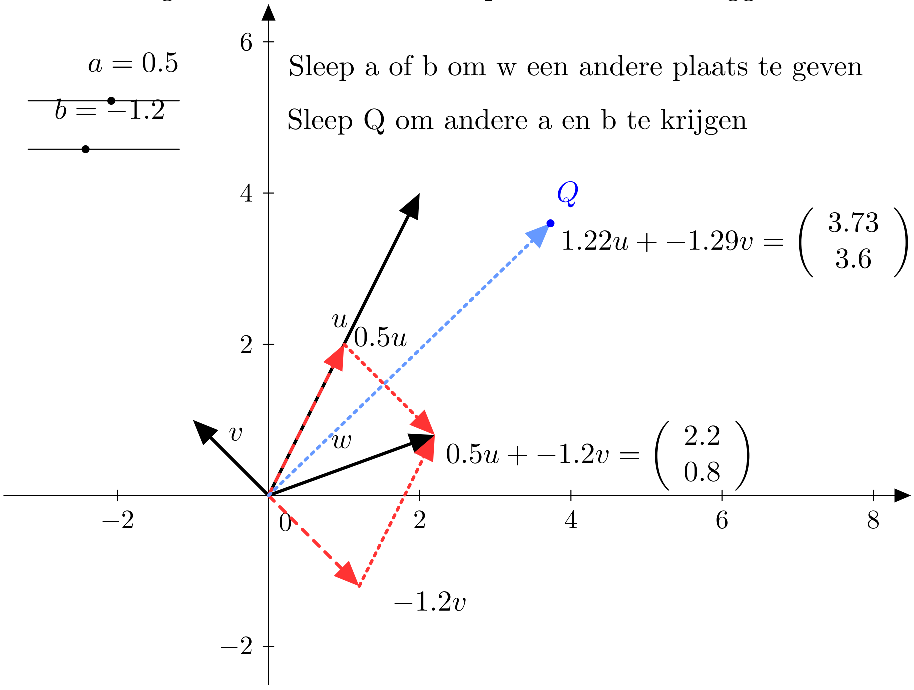
Opgaven:

10. Gegeven is het euclidische vlak met daarin de eenheidsvectoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Laat zien dat het euclidische vlak opgespannen door $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een vectorruimte is.
11. Bewijs dat iedere willekeurige vector $\vec{u}$ in het euclidische vlak kan worden geschreven als $\vec{u} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1$.

12. Het euclidische vlak kunnen we ook opspannen met twee andere vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ waarvoor geldt $\vec{u} \neq a \cdot \vec{v}$. Laat $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Gegeven: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Figure 2: vectorruimte Open vectorruimte.ggb



a Bepaal $\vec{w}$ voor $a = 2$ en $b = 3$.

b Gegeven is $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}$. Bereken exact de waarden voor a en b zodat $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

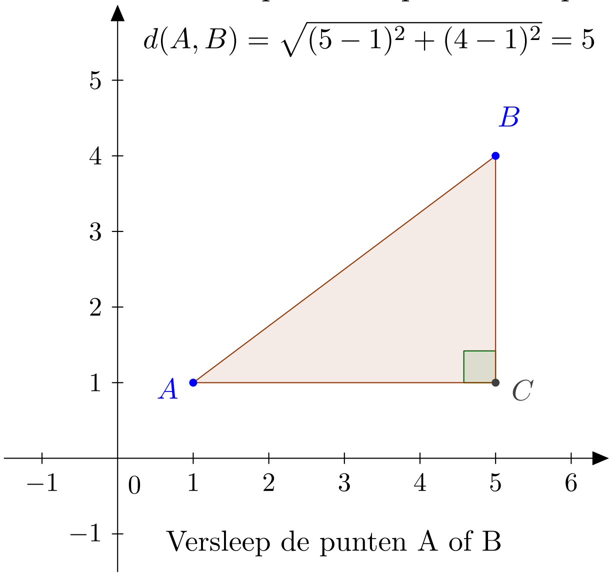
c Toon aan dat iedere willekeurige vector $\vec{w}$ in het euclidische vlak kan worden geschreven als $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

2.3.4 lengte en afstand

Opdracht: Gegeven zijn de punten $A = (3, 2)$ en $B = (4, 6)$. Bepaal de lengte van het lijnstuk AB.

In een orthonormaal-assenstelsel wordt de afstand tussen twee punten $A = (x_A, y_A)$ en $B = (x_B, y_B)$ gedefiniëerd als de lengte van de vector $\vec{AB}$ van A naar B. De **lengte** ofwel de **norm** van een vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ in een orthonormaal-assenstelsel

Figure 3: afstand tussen twee punten Open afstandpuntpunt.ggb



is gelijk aan:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{2}$$

Noem het punt $C = (x_B, y_A)$. Voor het bepalen van de lengte hebben we dus de stelling van Pythagoras gebruikt in de rechthoekige driehoek ΔACB,

Voorbeeld

Gegeven twee punten $A = (1, 2)$ en $B = (3, 1)$. Bereken de afstand van A naar B. Oplossing: De vector van A naar B is:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

en de norm van deze vector

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Opgaven:

13. Bepaal de lengte van de vectoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (antwoord op http://www.wolframalpha.com)

14. Bepaal de lengten van de zijden van de driehoek ΔABC met punten $A = (3, 4)$, $B = (1, 2)$ en $C = (-2, 3)$

15. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.4 Lijn

Opdracht: Teken de lijn $y = 3x + 5$. Gegeven zijn de vectoren $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Teken in dezelfde figuur de eindpunten van de vector $\vec{p} = \vec{s} + a \cdot \vec{r}$ voor $a = -1, 0, 1, 2$. Wat valt je op?

Een lijn l in een coördinatenstelsel is een rechte die door twee punten in het coördinatenstelsel wordt vastgelegd. Het geeft een relatie aan tussen een waarde op de x-as en een waarde op de y-as. De algebraïsche vorm van een lijn is een vergelijking. Er zijn drie algebraïsche vormen die we hier tegelijkertijd zullen behandelen. De eerste daarvan komt je waarschijnlijk bekend voor:

$$l : y = ax + b. \tag{3}$$

In deze vergelijking noemen we a de richtingscoëfficient van de lijn l. De richtingscoëfficient geeft aan dat je bij een stap van één eenheid in de richting van de x-as er a doet in de richting van de y-as. b is de y-coördinaat van het snijpunt van de lijn met de y-as.

2.4.1 opstellen vergelijking van een lijn

Gegeven twee punten $A = (x_A, y_A)$ en $B = (x_B, y_B)$. Opdracht: Stel een vergelijking op van de lijn l door A en B in de vorm $y = ax + b$.

1. Stap 1. Bepaal a.
   De vector $\vec{AB}$ van een punt $A = (x_A, y_A)$ naar $B = (x_B, y_B)$ wordt gegeven door:

   $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

   Deze vector geeft aan dat in Δx in de richting van de x-as er Δy in de richting van de y-as worden gedaan. Per stap in de richting van de x-as zijn dat dus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ stappen in de richting van de y-as. Dit geeft dat $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. De vergelijking wordt dan: $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + b$
3. Stap 2. Bepaal b.
   Zowel A als B liggen op de lijn. We hoeven nog maar één onbekende te bepalen (b). Het invullen van een van de punten volstaat dan om b te bereken. Nemen we A dan krijgen we:

$$
\begin{aligned}
y_A &= \frac{\Delta y}{\Delta x}x_A + b \Rightarrow \\
b &= y_A - \frac{\Delta y}{\Delta x}x_A
\end{aligned}
$$

   De vergelijking voor l is dan:

$$l : y = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + y_A - \frac{\Delta y}{\Delta x}x_A. \tag{4}$$

Voorbeeld

Gegeven twee punten $A = (1, 2)$ en $B = (3, 1)$. Opdracht: Stel een vergelijking op van de lijn l door A en B in de vorm $y = ax + b$. Oplossing: De vector van A naar B is:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De richtingscoëfficient van l is $a = \frac{-1}{2}$.
Wat leidt tot $l : y = -\frac{1}{2}x + b$. In vullen $A = (1, 2)$ geeft:

$$
\begin{aligned}
2 &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + b \Rightarrow \\
b &= 2\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

De gevraagde lijn is dan $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

Tweede vorm

De tweede vorm is slechts een herschikking van de bovenstaande vorm (3) namelijk

$$l : ax + by = c \tag{5}$$

Deze vorm heeft het grote voordeel dat ook verticale lijnen waarvan de richtingscoëfficiënt ∞ is eenvoudig kan worden weergegeven. Beschouw de vorm

$$l : y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + e.$$

Links en rechts vermenigvuldigen met Δx levert:

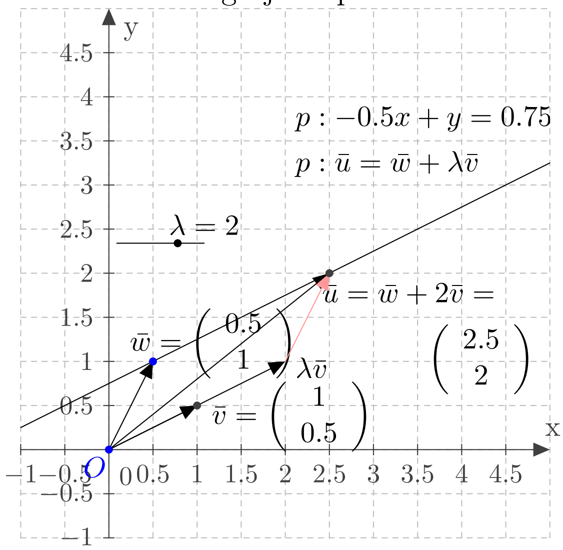
$$l : \Delta x \cdot y = \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot e.$$

Herschrijven levert dan:

$$l : -\Delta y \cdot x + \Delta x \cdot y = \Delta x \cdot e.$$

Definieer nu $a = -\Delta y$, $b = \Delta x$ en $c = \Delta x e$ dan krijgen we de vorm in vergelijking 5. Deze vorm noemen we ook de **vergelijking** van een lijn.

Figure 4: vector voorstelling lijn Open vectorvoorstelling.ggb



Derde vorm

De laatste vorm is de **vectorvoorstelling** van een lijn. In deze voorstelling nemen we een punt S op de lijn en beschouwen de vector $\vec{s}$ van uit de oorsprong naar dit punt. Deze vector noemen we een **steunvector** van de lijn. Verder is er een richting die wordt gegeven door de vector $\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$. Deze noemen we de **richtingsvector**. Een vector vanuit de oorsprong $\vec{p}$ wijzend naar ander punt P op de lijn verkrijgen we door de vector optelling te doen van de steun vector $\vec{s}$ en een bepaald aantal(λ) keer de richtingsvector $\vec{r}$.

$$l : \vec{p} = \vec{s} + \lambda\vec{r}. \tag{6}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn weer de twee punten $A = (1, 2)$ en $B = (3, 1)$. Opdracht: Stel een **vectorvoorstelling** op van de lijn l door A en B in de vorm $l : \vec{p} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$. Oplossing: Als steunvector kiezen we bijvoorbeeld de vector wijzend naar punt A. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Als richtingsvector kiezen we de vector $\vec{r} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die we al eerder hebben gezien. De vector voorstelling van de lijn door A en B is dan:

$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opgaven:

16. Bewijs de volgende uitspraak: Een lijn $k : ex + fy = g$ heeft de zelfde richting als $l : ax + by = c$ wanneer $\frac{e}{f} = \frac{a}{b}$

17. Gegeven is de driehoek ΔABC met punten $A = (3, 4)$, $B = (1, 4)$ en $C = (-2, 3)$. Geef vergelijkingen voor de zijden AB,AC en BC van de driehoek in de vormen: $ax + by = c$ en $\vec{p} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$

18. Teken de lijnen $l : -3x + y = 5$, $m : x + y = 1$, $n : x + y = 0$, $s : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,$t : \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

19. Welke van de volgende lijnen zijn evenwijdig? $l : -2x+y = 5$, $m : -4x+2y = 1$, $n : x + y = 0$, $s : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,$t : \vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. en $u : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

20. Waarom zijn $s : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. voorstellingen van dezelfde lijn?

21. Waarom zijn $l : -2x + y = 5$ en $m : 4x - 2y = -10$ vergelijkingen voor dezelfde lijn?

22. Stel een vergelijking op voor de lijn m evenwijdig aan de lijn $l : 2x + 3y = 4$ die door het punt $A(-1, 8)$ gaat. Geef zowel een vergelijking en een vectorvoorstelling.

23. Bewijs: Een lijn die in het euclidische vlak ligt en door de oorsprong gaat is een vectorruimte, een lijn die niet door de oorsprong gaat is dat niet.

24. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.5 Snijdende lijnen

Lijnen in het "euclidische" vlak kunnen samenvallen, evenwijdig zijn of snijden. Als twee lijnen snijden dan is er een snijpunt. De coördinaten van dit snijpunt moet worden opgelost uit de twee vergelijkingen van de lijnen. De twee lijnen kunnen door een combinatie van de verschijningsvormen 3, 5 en 6 worden gegeven. We presenteren de oplossingen per combinatie aan de hand van iedere keer het zelfde voorbeeld.

$\begin{cases} l : y = \frac{3}{4}x + 4 \\ m : y = \frac{1}{4}x - 1 \end{cases}$	Gelijkstellen van de vergelijkingen voor l en m. $\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x + 4 &= \tfrac{1}{4}x - 1 \Rightarrow \\ \tfrac{1}{2}x &= -5 \Rightarrow \\ x &= -10 \Rightarrow \\ y &= \tfrac{1}{4} \cdot -10 - 1 = -3\tfrac{1}{2} \end{aligned}$
$\begin{cases} l : -3x + 4y = 16 \\ m : -x + 4y = -4 \end{cases}$	Oplossing: Onderste vergelijking van de bovenste aftrekken levert $\begin{cases} -3x + 4y = 16 \\ -2x = 20 \end{cases}$ Uit de onderste vergelijking volgt weer $x = -10$. In vullen in de bovenste vergelijking geeft $-3 \cdot -10 + 4y = 16 \Rightarrow y = -3\frac{1}{2}$

$\begin{cases} l:P = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \\ m:Q = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\end{cases}$	P moet gelijk worden aan Q. Dus $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ Opstellen van een stelsel vergelijkingen voor de x-coördinaat en de y-coördinaat van de snijpunten: $\begin{cases}0+4\lambda = 0+4\mu\\ 4+3\lambda = -1+\mu\end{cases}$ We moeten nu een λ en μ vinden die aan dit stelsel voldoet zoals we dat hebben gedaan in het voorbeeld hierboven. $\begin{cases}\lambda = \mu\\ 4+3\lambda = -1+\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = \mu\\ 2\lambda = -5\end{cases} \Rightarrow$ $\lambda = \mu = -\frac{5}{2}$ Nu λ of μ invullen in de vergelijkingen levert: $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-3\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
$\begin{cases} l:P = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \\ m:-x+4y = -4\end{cases}$	Oplossing: $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ Ofwel: $P = \begin{cases}x = 0+4\lambda\\ y = 4+3\lambda\end{cases}$ Substitutie van x en y in de vergelijking voor m levert:$-(4\lambda)+4(4+3\lambda) = -4 \Rightarrow$ $8\lambda = -20 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$ Invullen λ levert: $P = \begin{pmatrix}-10\\-3\frac{1}{2}\lambda\end{pmatrix}$

Opgaven:

25. Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen: $l : 2x - 3y = 6$, $m : y = -4x + 8$
26. Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen: $l : 2x - 3y = 6$, $m : 6x + y = 9$
27. Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen: $l : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $m : 6x + y = 9$
28. Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen: $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $m : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
29. Bepaal de snijpunten van de volgende lijnen: $l : P = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $m : Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
30. Voor welke p en q snijden de lijnen : $l : P = \begin{pmatrix} 6 \\ p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $m : Q = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ elkaar in het punt $(0, -1)$
31. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.6 Inproduct

In deze sectie behandelen we het inproduct van twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$. In de lineaire algebra en analytische meetkunde wordt het inproduct veel gebruikt. Veel rekenwerk wordt eenvoudiger als de rekenregels van het inproduct worden ingezet. Het is echter wel even wennen aan dit nieuwe concept. Laat je er echter niet door ontmoedigen. We geven toepassingen van het inproduct zowel in de wiskunde als in de natuurkunde.

Het inproduct (ook wel inwendig product of dot product (Engels)) van twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ \vdots \\ u_y \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ \vdots \\ v_y \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ wordt gedefiniéerd als

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + \cdots + u_y \cdot v_y \tag{7}$$

Opgaven:

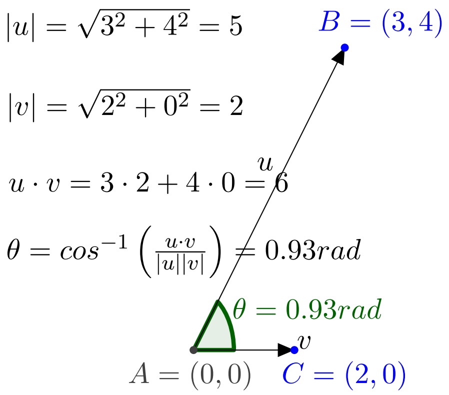
32. Bewijs met behulp van definitie 7 de volgende eigenschappen van het inproduct:

$$\begin{aligned} < \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} > &= < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} > && (8) \\ < \vec{u}, a \cdot \vec{v} > &= a \cdot < \vec{u}, \vec{v} > && (9) \\ < \vec{u}, \vec{v} > &= < \vec{v}, \vec{u} > && (10) \\ < \vec{u}, \vec{u} > &= |\vec{u}|^2 && (11) \end{aligned}$$

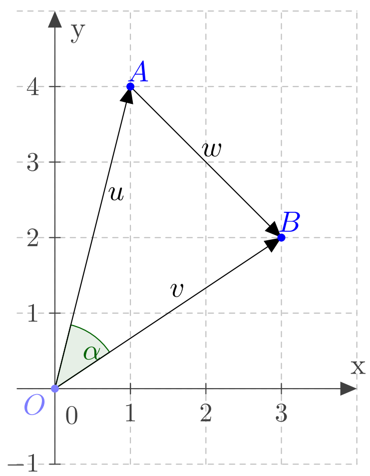
Stelling: In een orthonormaal-assenstelsel is het inproduct ook gelijk aan:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta) \tag{12}$$

Hierin is $|\vec{x}|$ de norm (=lengte) van de vector $\vec{x}$. En θ de kleinste hoek tussen de twee vectoren. In de applets hieronder kun je in de bovenste een gevoel voor het inproduct krijgen. Daaronder staan twee bewijzen van de stelling. Leer de bovenste van die twee uit je hoofd.



In de applet (Open inproduct.ggb) links zie je een tekening van twee vectoren. Versleep het punt B of C en bekijk de waarde van het inproduct. Sleep het punt B naar de coördinaten $(0, 5)$. Wat neem je waar?
Verplaats het punt B naar het punt C. Wat kun je zeggen over de uitspraak
$< \vec{u}, \vec{u} >= |\vec{u}|^2$?



Bewijs met de eigenschappen van het inproduct 8-11. In de applet links (Open bewijsinproduct2.ggb) is de driehoek ΔOAB getekend. In deze driehoek geldt de cosinus regel

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos(\alpha) (13)$$

Nu is $OA = |\vec{u}|$, $OB = |\vec{v}|$ en $AB = |\vec{AB}| = |\vec{u} - \vec{v}|$. Maken we gebruik van (11) dan is (13) te schrijven als.

$$< \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v} >=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{v}, \vec{v} > -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$< \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} > - < \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} >=$$

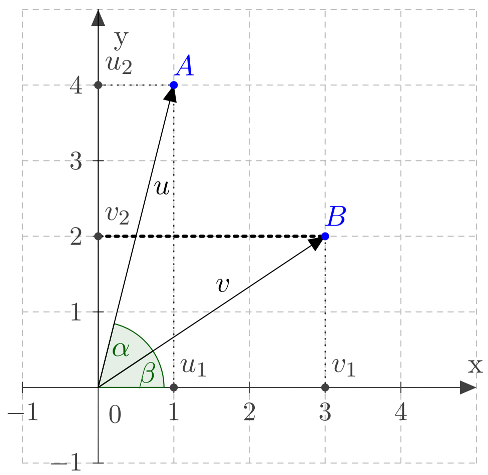
$$< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{v}, \vec{v} > -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$< \vec{u}, \vec{u} > -2 < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{v} >=$$

$$< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{v}, \vec{v} > -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$-2 < \vec{u}, \vec{v} >= -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$< \vec{u}, \vec{v} >= |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \Rightarrow$$



Bewijs voor $\mathbb{R}^2$: In de applet links (Open bewijsinproduct.ggb) zijn de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ getekend en is α de hoek tussen die twee vectoren.
Stel dat β de hoek is die $\vec{v}$ maakt met de positieve x-as. Dan is $v_1 = |\vec{v}| \cos(\beta)$ en $v_2 = |\vec{v}| \sin(\beta)$.
De hoek die $\vec{u}$ met de positieve x-as maakt is $\alpha + \beta$, en dus is $u_1 = |\vec{u}| \cos(\alpha + \beta)$ en $u_2 = |\vec{u}| \sin(\alpha + \beta)$.
Dit geeft

$$\begin{aligned}
< \vec{u}, \vec{v} > &= |\vec{v}| \cos(\beta)|\vec{u}| \cos(\alpha + \beta) \\
&\quad + |\vec{v}| \sin(\beta)|\vec{u}| \sin(\alpha + \beta) \\
&= |\vec{v}||\vec{u}| \left(\cos(\beta) \cos(\alpha + \beta)\right. \\
&\quad \left.+ \sin(\beta) \sin(\alpha + \beta)\right) \\
&= |\vec{v}||\vec{u}| \cos(\beta - (\alpha + \beta)) \\
&= |\vec{v}||\vec{u}| \cos(-\alpha) \\
&= |\vec{v}||\vec{u}| \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Voorbeelden:

- Stel $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = 4$ en $\theta = \pi/6$ dan is het inproduct $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot 4 \cdot cos(\pi/6) = 5 \cdot 4 \cdot 1/2 = 10$
- Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.
  Oplossing: $< \vec{u}, \vec{v} >= 5 \cdot 24 + 10 \cdot 12 = 240$. $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = 13$, $|\vec{v}| = \sqrt{100 + 576} = 26$.
  $< \vec{u}, \vec{v} >= 13 \cdot 26 \cos(\theta) \Rightarrow 240 = 13 \cdot 26 \cos(\theta) \Rightarrow$
  $\frac{240}{13 \cdot 26} = cos(\theta) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{120}{13 \cdot 13}) \approx 45°$.

Opgaven:

33. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.
34. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.
35. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
36. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 150 \\ 1000 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 150 \end{pmatrix}$.
37. Wanneer staan twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar?
38. Bepaal de hoek tussen de lijnen $l : P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m : Q = P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.
39. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.7 Normaalvector van een lijn

Een eerste toepassing van het inproduct is het opstellen van een lijn gegeven twee punt A en B. We beginnen eerste met het meest eenvoudige geval, een lijn door de oorsprong. Dus $A = (0, 0)$ en $B = (x_B, y_B)$.
Een vergelijking van de lijn is $l : y = \frac{y_B}{x_B} x$ ofwel $l : -y_B \cdot x + x_B \cdot y = 0$.
De richtingsvector van deze lijn is $\vec{r_l} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$. Definiéren we nu $\vec{n_l} = \begin{pmatrix} -y_B \\ x_B \end{pmatrix}$ ofwel we schrijven de coëfficienten uit de tweede vergelijking ook als een vector dan is dus het inproduct $< \vec{r_l}, \vec{n_l} >= 0$ en dus $\cos(\angle(\vec{r_l}, \vec{n_l})) = 0$. De twee vectoren staan dus loodrecht op elkaar. Een vector die loodrecht op een lijn staat noemt men een **normaalvector** van die lijn.

Omdat een vector $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong naar punt X op de lijn l door de oorsprong altijd een richtingsvector is van de lijn l staat de vector $\vec{X}$ ook loodrecht op de normaalvector $\vec{n_l}$.

$< \vec{X}, \vec{n_l} >= 0 \Rightarrow -y_B \cdot x + x_B \cdot y = 0$

Een vergelijking van een lijn door de oorsprong gegeven een normaalvector $\vec{n_l}$ kan dus worden geschreven als:

$$l :< \vec{X}, \vec{n_l} >= 0 \tag{14}$$

Als de lijn niet door de oorsprong gaat dan krijgen we het volgende te zien: Laat $A = (x_A, y_A)$ en $B = (x_B, y_B)$. Dan hebben we volgens vergelijking (4)

$$l : y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + y_A - \frac{\Delta y}{\Delta x} x_A.$$

ofwel

$$l : -\Delta y \cdot x + \Delta x \cdot y = -\Delta y \cdot x_A + \Delta x \cdot y_A. \Leftrightarrow$$

$$l :< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} >$$

De richtingsvector van deze lijn is $\vec{r_l} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$. Definiëren we weer $\vec{n_l} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$. Dan is het inproduct $< \vec{r_l}, \vec{n_l} >= 0$ waaruit volgt dat

$\cos(\angle(\vec{r_l}, \vec{n_l})) = 0$. De vectoren $\vec{r_l}$ en $\vec{n_l}$ staan dus loodrecht op elkaar staan. Bovenstaande vergelijking kan nu worden herschreven tot:

$$l :< \vec{X}, \vec{n_l} >=< \vec{A}, \vec{n_l} >$$

De constanten in vergelijking (5) $l : ax + by = c$ kunnen we nu bepalen met behulp van de normaal vector en een punt.

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(1,3)$ en $B(2,5)$. Bepaal een vergelijking van de lijn l door A en B in de vorm $ax + by = e$.
Oplossing: $\vec{r_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Een normaalvector van de lijn $\vec{n_l} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De vergelijking van de lijn wordt nu:
$l : -2x + y =< \vec{n_l}, \vec{A} > \Rightarrow -2x + y = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \Rightarrow l : -2x + y = 1.$
Controleer dat ook B aan deze vergelijking voldoet.

De vergelijking van een lijn in $\mathbb{R}^2$ kan nu ook volledig als inproduct worden gedefinieerd. Gegeven de punten A en B Laat $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\vec{n} = \begin{pmatrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{pmatrix}$, dan is de vergelijking van de lijn gelijk aan:

$$l :< \vec{n}, \vec{X} >=< \vec{n}, \vec{A} > \tag{15}$$

Voorbeelden

- Gegeven is de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{s} + \lambda\vec{r_l}$. Geef een vergelijking van de lijn in de vorm $l : ax + by = c$. Oplossing: Een normaalvector van de lijn is $\vec{n_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. De vergelijking krijgen we dan eenvoudig via het inproduct $l :< \vec{n_l}, \vec{X} >=< \vec{n_l}, \vec{s} >$ ofwel

  $$l :< \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

  $$l : x + 4y = 9$$

- Gegeven is de lijn $l : x + 4y = 9$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn. Oplossing: De normaalvector van de lijn is $\vec{n_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Een richtingsvector van de lijn is dan $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Een steun vector krijgen we door een x en y te kiezen die aan de vergelijking voldoen. Kiezen we $y = 0$ dan is $x = 9$ Een vectorvoorstelling van de lijn is dan

$$l = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Met behulp van het inproduct is het ook mogelijk om een snijpunt van twee lijnen te berekenen als één van de lijnen als vectorvoorstelling is gegeven en de andere als vergelijking. Laat $l : ax + by = c$ ofwel $l :< \vec{n}_l, \vec{X} >= c$ en $m : P = \vec{s}_m + \lambda\vec{r}_m$. Voor snijpunt S geldt nu: $< \vec{n}_l, \vec{S} >= c$ en $S = \vec{s} + \lambda\vec{r}_l$ voor een zekere λ.
Invullen levert:

$$< \vec{n}_l, \vec{s}_m + \lambda\vec{r}_m >= c$$

Gebruiken we de rekenregels voor het inproduct dan kunnen we deze vergelijking herschrijven tot

$$< \vec{n}_l, \vec{s}_m > +\lambda < \vec{n}_l, \vec{r}_m >= c \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{c- < \vec{n}_l, \vec{s}_m >}{< \vec{n}_l, \vec{r}_m >} \tag{16}$$

Het invullen van deze waarde voor λ in de vectorvoorstelling van m levert het gevraagde snijpunt.

Voorbeeld

- Gegeven is de lijn $l : 2x - 3y = 1$ en de lijn $m : P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{s} + \lambda\vec{r}_l$.
  Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l en m.
  Oplossing: $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
  Invullen in $\lambda = \frac{c-<\vec{n}_l,\vec{s}_m>}{<\vec{n}_l,\vec{r}_m>}$ levert:

$$\lambda = \frac{1- < \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} >} = \frac{1 - (2 + 6)}{-2 - 12} = \frac{1}{2}.$$

Het snijpunt S is nu $S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Controle door invullen in de vergelijking van l geeft $2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 = 1$. Dit klopt dus de berekening was goed.

Opgaven:

40. Gegeven is de lijn $l = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geef een vergelijking van de lijn in de vorm $l : ax + by = c$.

41. Gegeven is de lijn $l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geef een vergelijking van de lijn in de vorm $l : ax + by = c$.

42. Gegeven is de lijn $l : 2x + 4y = 8$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn.

43. Gegeven is de lijn $l : -x + y = 10$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn.

44. Gegeven is de lijn $l : -x+y = 10$ en de lijn $m : P = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l en m.

45. Gegeven is de lijn $k : 2x + 4y = 8$ en de lijn $n : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en n.

46. Gegeven is een driehoek ΔABC.
    Bewijs de stelling: De hoogtelijnen van een driehoek gaan door 1 punt.

47. Gegeven is een driehoek ΔABC.
    Bewijs de stelling: De zwaartelijnen van een driehoek gaan door 1 punt.

48. Gegeven is een driehoek ΔABC.
    Bewijs de stelling: De middelloodlijnen van een driehoek gaan door 1 punt.

49. Gegeven is een driehoek ΔABC met S_h het snijpunt van de hoogtelijnen, S_z het snijpunt van de zwaartelijnen en S_b het snijpunt van de middelloodlijnen.
    Bewijs de stelling: S_h, S_z en S_b liggen op één lijn.

50. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.8 Afstanden

2.8.1 afstand tussen twee punten

In sectie 2.3.4 is de afstand $d(A, B)$ tussen twee punten A en B in een orthonormaal-assenstelsel gedefinieerd als de lengte van de vector van A naar B:

$$|\vec{v}_{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{< \vec{B} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A} >}. \tag{17}$$

2.8.2 afstand tussen een lijn en een punt

Opdracht: Gegeven is de lijn $l : -x + y = 1$ en het punt $A(0, 2)$. Bereken exact de kortste afstand van A naar de lijn. Hint: maak een tekening.
Zou je recept ook snel werken voor de lijn $l : -3x + 19y = 9$ en het punt $A(\frac{1}{3}, \frac{7}{19})$

Naast de afstand tussen twee punten is er in de lineaire algebra ook de afstand tussen een punt en een lijn. De afstand $d(P, l)$ tussen een punt P en een lijn l is gedefinieerd als de kortste weg van een punt naar de lijn. De kortste weg is over de loodlijn op de lijn l door het punt P. (Bewijs dit).

Hier zullen we een formule afleiden waarmee snel de afstand van een punt tot een lijn kan worden berekend. Het begrip van de afleiding is belangrijker dan het kunnen toepassen. We zullen gebruik gaan maken van de inproduct notatie van een lijn, de normaalvector en een vectorvoorstelling van een lijn. Laat de lijn l gegeven zijn door de vergelijking

$$l :< \vec{n}_l, \vec{x} >= c,$$

waarin $\vec{n}_l$ de normaalvector van lijn l. De normaalvector staat loodrecht op de lijn l en is dus de richtingsvector voor de loodlijn m op l. Op m moet het punt P liggen. Een vectorvoorstelling voor m is dan:

$$m : \vec{Q} = \vec{P} + \lambda \vec{n}_l.$$

De afstand van P tot l is gelijk aan de afstand tussen P en het snijpunt S van de lijnen l en m. Om het snijpunt te vinden bepalen we λ door formule 16 te gebruiken

$$\lambda = \frac{c- < \vec{n}_l, \vec{P} >}{< \vec{n}_l, \vec{n}_l >} \tag{18}$$

Het punt snijpunt S wordt dan:

$$\vec{S} = \vec{P} + \frac{c- < \vec{n}_l, \vec{P} >}{< \vec{n}_l, \vec{n}_l >} \vec{n}_l \tag{19}$$

De afstand $d(P,l)$ is gelijk aan de afstand $d(P,S)$:

$$d(P,S)=|\vec{S}-\vec{P}|=|\frac{c-<\vec{n}_l,\vec{P}>}{<\vec{n}_l,\vec{n}_l>}\vec{n}_l|=|\frac{c-<\vec{n}_l,\vec{P}>}{<\vec{n}_l,\vec{n}_l>}|\cdot|\vec{n}_l|=\frac{|c-<\vec{n}_l,\vec{P}>|}{|\vec{n}_l|} \tag{20}$$

Voorbeeld

- Gegeven is de lijn $l: -3x+19y=9$ en het punt $A(\frac{1}{3},\frac{7}{19})$ bereken de afstand van A tot l.
  Oplossing: $d(A,l)=\frac{|9-(-3\cdot\frac{1}{3}+19\cdot\frac{7}{19})|}{\sqrt{(-3)^2+(19)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{270}}=\frac{1}{\sqrt{30}}=\frac{1}{30}\sqrt{30}$
- Gegeven is de lijn $l: 3x+4y=10$ en het punt $P(3,5)$. Bereken de afstand van P tot l.
  Oplossing: $d(P,l)=\frac{|10-(3\cdot3+4\cdot5)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-19|}{5}=3\frac{4}{5}$
- Gegeven zijn de lijnen $l: x-3y=12$ en $m: 9x+3y=2$. Stel vergelijkingen op voor de bissectrices van de lijnen l en m Punten op de bissectrices van lijnen hebben gelijke afstand tot beide lijnen. Open opgave_bissectrice.ggb
  Oplossing: $\frac{|12-x+3y|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|2-9x-3y|}{\sqrt{81+9}}\Rightarrow$
  $|12-x+3y|=\sqrt{10}\frac{|2-9x-3y|}{\sqrt{90}}=\frac{|2-9x-3y|}{3}\Rightarrow$
  $12-x+3y=\frac{2}{3}-3x-y$ of $12-x+3y=-\frac{2}{3}+3x+y\Rightarrow$
  $2x+4y=-11\frac{1}{3}$ of $-3x+2y=-12\frac{2}{3}$.

Opgaven:

Tip: Gebruik in deze opdrachten geogebra om onderzoek te doen.

51. Gegeven is de lijn $l: x-4y=2$ en het punt $P(1,4)$. Bereken exact de afstand van P tot l.
52. Gegeven is de lijn $k: 12x-9y=12$ en het punt $Q(2,0)$. Bereken exact de afstand van Q tot k.
53. Gegeven is de lijn $m: x=2$ en het punt $P(3,4)$. Bereken exact de afstand van P tot m.
54. Gegeven is de driehoek ΔABC met $A=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$ en $C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

    (a) Bereken exact de lengte van de hoogtelijnen in de driehoek.

(b) Bewijs dat voor iedere driehoek ΔABC geldt: De lengte l_{hC} van de hoogtelijn van uit C op AB is gegeven door de formule:

$$l_{hC} = \frac{| < \vec{n}_{AB}, \vec{C} - \vec{A} > |}{|\vec{n}_{AB}|} \tag{21}$$

Hierin is $\vec{n}_{AB}$ de normaalvector van de zijde AB.

(c) Bereken exact de oppervlakte van de driehoek ΔABC

(d) Bewijs dat voor iedere driehoek ΔABC geldt: De oppervlakte O_{ABC} van een ΔABC is gegeven door de formule:

$$O_{ABC} = \frac{| < \vec{n}_{AB}, \vec{AC} > |}{2} \tag{22}$$

Hierin is $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ -(y_B - y_A) \end{pmatrix}$ de normaalvector van de zijde AB met dezelfde lengte als $\vec{AB}$.

55. Gegeven zijn de lijnen $l : x - 4y = 10$, $k : 4x + 4y = 10$, $m : x = 2$. Bereken exact de lengten van de hoogtelijnen in de driehoek die wordt gevormd door de snijpunten van de drie lijnen. Bereken ook de hoeken van de driehoek in graden nauwkeurig.

56. Gegeven is de lijn $m : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het punt $P(4, 6)$. Bereken exact de afstand van P tot m.

57. Gegeven is de lijn $n : 2x+3y = 1$ en het punt $P(a, 4)$. Bereken exact de waarde van a waarvoor de afstand van P tot m gelijk is aan $\frac{5}{13}\sqrt{13}$.

58. Gegeven is de lijn $n : 2x+py = 2$ en het punt $P(1, 4)$. Bereken exact de waarde van p waarvoor de afstand van P tot m gelijk is aan 2.

59. Bewijs: De oppervlakte van een vierhoek O_{ABCD} is gegeven door de formule:

$$O_{ABCD} = \frac{| < \vec{n}_{AC}, \vec{BD} > |}{2} \tag{23}$$

60. Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bereken met de formule uit de vorige opgave de oppervlakte van de vierhoek. Bereken de oppervlakte ook op een andere manier.

61. Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bereken exact de oppervlakte van de vierhoek. Open opgave_vierhoek.ggb

62. Verzin een algoritme om voor een willekeurige vijfhoek $ABCDE$ de oppervlakte te berekenen. Kun je ook een formule leveren?

63. Gegeven zijn de lijnen $l : 3x - 4y = 12$ en $m : 4x - 3y = 24$. Stel vergelijkingen op voor de bissectrices van de lijnen l en m Punten op de bissectrices van lijnen hebben gelijke afstand tot beide lijnen. Open opgave_bissectrice.ggb

64. Gegeven zijn de lijnen $l : x - 2y = 7$ en $m : 4x + 2y = 10$. Stel vergelijkingen op voor de bissectrices van de lijnen l en m.

65. Gegeven is een driehoek ΔABC.
Bewijs de stelling: De bissectrices van een driehoek gaan door 1 punt.

66. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

2.9 Arbeid

Een voorbeeld uit de natuurkunde is het begrip **arbeid** in de klassieke mechanica. De hoeveelheid arbeid die door een kracht F over een afstand s op een deeltje/voorwerp wordt verricht is gegeven door de formule $W = F \cdot s$. Een voorwaarde voor deze formule is dat F en s in dezelfde richting wijzen. Dit is echter niet altijd het geval. Om de arbeid op het voorwerp voor een willekeurig gerichte kracht $\vec{F}$ over een afstand $\vec{s}$ te berekenen moet $\vec{F}$ dus worden ontbonden in een kracht langs $\vec{s}$ en een kracht loodrecht op $\vec{s}$.

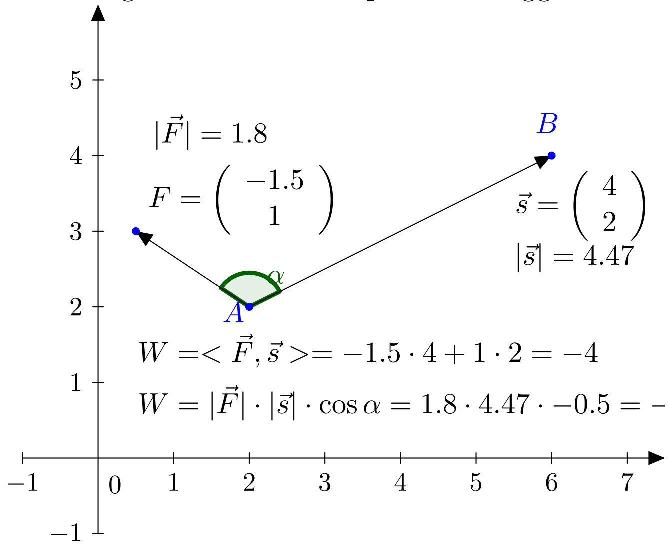
Opdracht: Toon aan dat de component langs $\vec{s}$ aan lengte gelijk is aan $|\vec{F}| \cdot \cos\alpha$, waarin α de hoek tussen s en F en dat $W = |\vec{s}||\vec{F}| \cos\alpha$

De formule voor de arbeid gevonden in de opdracht is gelijk aan stelling 12 van het inproduct. De arbeid is dus ook gelijk aan

$$W =< \vec{s}, \vec{F} > . \tag{24}$$

De ontbinding van de kracht is dus niet nodig als je de coördinaten van de krachtvector en verplaatsingsvector kent.

Figure 5: Arbeid Open arbeid.ggb



Opgaven

67. Gegeven is de kracht $\vec{F} : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Een voorwerp dat beweegt van $A(4,6)$ naar $B(1,2)$ ondervindt deze kracht. Bereken de arbeid die door de kracht is geleverd als het voorwerp in B is aangekomen.

68. Gegeven is de lijn $l : x - 4y = 2$ en de kracht $\vec{F} : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Een voorwerp dat beweegt van punt A op de lijn met $x_A = 1$ naar punt B op die lijn met $y_B = 4$ ondervindt deze kracht. Bereken de arbeid die door de kracht is geleverd als het voorwerp in B is aangekomen.

69. Bereken in de bovenstaande opgaven de grootte van de kracht langs de verplaatsing.

70. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3 coördinaten in $\mathbb{R}^3$ en hoger

In drie dimensie of hoger (n) verandert er niet heel veel in de lineaire algebra. Een punt heeft nu drie of n coördinaten. Een vector bestaat uit een verplaatsing in drie of n richtingen.

In $\mathbb{R}^n, n = 3, 4, \cdots$ is een vector gegeven door

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

De lengte (of norm) van een n-dimensionale vector $\vec{v}$ is gelijk aan

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \tag{25}$$

Voorbeeld: Gegeven is de drie dimensionale vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Opdracht: Teken deze vector in een 3-dimensionaal assenstelsel toon aan met behulp van de stelling van Pythagoras dat deze aanpak juist is.

Het inproduct tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ blijft hetzelfde als vergelijking 7:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i}^{n} u_i \cdot v_i \tag{26}$$

Opgaven:

1. Bewijs de stelling: In een orthonormaal-assenstelsel in $\mathbb{R}^n$ is het inproduct gelijk aan

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta) \tag{27}$$

3.1 De voorstelling van een lijn in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ met $n > 2$ kan een lijn niet meer worden weergegeven als vergelijking van de vorm $ax + by = c$. In $\mathbb{R}^3$ is dit een voorbeeld van een vergelijking voor een vlak. We zullen daar later op terugkomen.

De vectorvoorstelling $l : P = \vec{s} + \lambda \vec{r_l}$ blijft echter mogelijk. De steunvector $\vec{s}$ en richtingsvector $\vec{r_l}$ zijn nu vectoren in $\mathbb{R}^n$. Een lijn wordt bepaalt door deze twee vectoren, door twee punten A en B of door een combinatie van een van de vectoren en een punt.

Voorbeeld

- Gegeven zijn de punten $A = (1, 2, 3)$ en $B = (3, 2, 1)$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn l door A en B.
  Oplossing: Kies als steunvector $\vec{s}$ de vector vanuit de oorsprong naar A of B. Bepaal de richtingsvector uit de verschilvector
  $\vec{r_l} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$
  Een vectorvoorstelling van de lijn l is dan bijvoorbeeld.
  $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Gegeven is het punt $A = (1, 2, 3)$ en steunvector $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn m door A met steunvector $\vec{s}$.
  Oplossing: Bepaal de richtingsvector uit de verschilvector
  $\vec{r}_m = \vec{A} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$
  Een vectorvoorstelling van de lijn l is dan bijvoorbeeld.
  $m : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Opgaven:

2. Gegeven zijn de punten $A = (4, 5, 1)$ en $B = (3, 2, 1)$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn l door A en B.

3. Gegeven is het punt $A = (2, 2, 2)$ en steunvector $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn m door A met steunvector $\vec{s}$.

4. Gegeven zijn de punten $A = (1, 1, 1)$ en $B = (3, 3, 3)$. Waarom is de vectorvoorstelling $n : P = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een goede voorstelling voor de lijn door A en B?

5. Gegeven zijn de punten $A = (4, 5, 1, 0, 9, 11)$ en $B = (3, 2, 1, 1, 2, 3)$. Geef een vectorvoorstelling van de lijn l door A en B.

6. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.2 Twee lijnen in $\mathbb{R}^n$

In dimensie drie en hoger kunnen twee lijnen l en m net als in twee dimensies elkaar snijden, evenwijdig zijn of samenvallen. Er is echter een derde optie namelijk dat ze elkaar kruisen. Twee kruisende lijnen zijn niet evenwijdig, ofwel ze hebben niet dezelfde richting, en snijden elkaar niet ofwel de vergelijking $l = m$ heeft geen oplossing. We zullen aan de hand van een aantal voorbeelden bepalen of twee lijnen elkaar snijden, kruisen of evenwijdig dan wel samenvallend zijn.

- Gegeven zijn de lijnen $l : P = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De lijnen zijn niet samenvallend of evenwijdig want de $\vec{r_l}$ en $\vec{r_m}$ zijn geen veelvoud van elkaar en hebben dus niet de zelfde richting. Een eventueel snijpunt wordt bepaald door het oplossen van de vergelijking:

$$\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  We zoeken dus een λ en μ. Dit levert het stelsel van drie vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} -2\lambda &= 5 + \mu \\ \lambda &= 2 + \mu \\ 2\lambda &= 2 + \mu \end{cases}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen lossen we op $\lambda = -1$ en $\mu = -3$. Er is sprake van een snijpunt als deze twee waarden voor λ en μ ook voldoen in de laatste vergelijking. Echter $2 \cdot -1 \neq 2 + -3$. De conclusie is dat de lijnen elkaar kruisen.

- Gegeven zijn de lijnen $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De lijnen zijn niet samenvallend of evenwijdig want de $\vec{r}_l$ en $\vec{r}_m$ zijn geen veelvoud van elkaar en hebben dus niet de zelfde richting. Een eventueel snijpunt wordt bepaald door het oplossen van de vergelijking:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

We zoeken dus een λ en μ. Dit levert het stelsel van drie vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} \lambda &= \mu \\ 2 - 2\lambda &= -\mu \\ 0 &= 2 - \mu \end{cases}$$

De laatste vergelijking levert $\mu = 2$. De eerste geeft dan $\lambda = 2$. Vullen we deze twee waarden in in de tweede vergelijking dan zien we dat de waarden ook aan deze vergelijking voldoen. Het snijpunt S is dus $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Gegeven zijn de lijnen $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Omdat $\vec{r}_l = -2\vec{r}_m$ hebben de lijnen eenzelfde richting en zijn de lijnen in ieder geval evenwijdig. Als ze een punt gemeenschappelijk hebben vallen ze samen.

Om dit te ontdekken gaan we een λ zoeken die de steunvector van m levert. We moeten dus oplossen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

. Dit levert het stelsel:

$$\begin{cases} 2\lambda &= 0 \\ 2 - 6\lambda &= 0 \\ 14\lambda &= 2 \end{cases}$$

De eerste vergelijking levert $\lambda = 0$. Deze waarde voldoet niet in de andere vergelijkingen. De lijnen zijn dus niet samenvallend maar evenwijdig.

Opgaven:

Bepaal de ligging van de volgende lijnen paren (snijden,kruisen,evenwijdig of samenvallend). Geef waar mogelijk de coördinaten van het snijpunt.

7. $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
8. $l : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
9. $l : P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
10. $l : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
11. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.3 Vlakken in $\mathbb{R}^3$

In een drie dimensionale ruimte is er naast het punt en de lijn een derde lineaire figuur, het vlak. Een vlak wordt bepaald door drie punten, die begrijpelijkerwijs niet op één lijn mogen liggen. Een vlak kan daarom ook worden bepaald door een lijn en een punt niet op de lijn, of door een paar snijdende lijnen. Het vlak in $\mathbb{R}^3$ heeft net als de lijn in $\mathbb{R}^2$ meerdere verschijningsvormen: de vectorvoorstelling, de vergelijking en de definitie als inproduct.

3.4 Vectorvoorstelling

We beginnen met de vector voorstelling. Gegeven zijn de punten $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ en $C = (x_C, y_C, z_C)$ die vlak v bepalen. Een **vectorvoorstelling** voor een vlak v heeft een steunvector $\vec{s}$ nodig en twee richtingsvectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ en wordt gegeven door:

$$v : P = \vec{s} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2 \tag{28}$$

Voor de steunvector kunnen we een vector vanuit de oorsprong naar één van de drie punten A, B of C kiezen. Voor de richtingsvectoren kunnen net als bij de vectorvoorstelling voor een lijn de verschilvectoren nemen tussen twee punten paren. Een voorstelling kan bijvoorbeeld zijn:

$$v : P = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}\right)$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ en $C = (0, 1, 0)$. Een vectorvoorstelling voor het vlak v door deze punten is:

$$v : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Opgaven

Geef vectorvoorstellingen voor het vlak door:

12. de punten $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ en $C = (0, 0, 1)$.
13. de punten $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 2)$ en $C = (3, 0, 3)$.
14. het punt $A = (1, 1, 1)$ en de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$.
15. de lijnen $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ en $m : q = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Laat eerst zien dat de lijnen ook werkelijk snijden.
16. Waarom is de vectorvoorstelling

$$v : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ook een vectorvoorstelling voor het vlak uit het voorbeeld?

17. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.5 Inproduct, uitproduct en vergelijking voor vlak

Een vlak in $\mathbb{R}^3$ kan ook worden gegeven in de vorm van de vergelijking:

$$v : ax + by + cz = d \tag{29}$$

We kunnen net als bij het opstellen van een vergelijking in $\mathbb{R}^2$ met behulp van drie gegeven punten een stelsel van vergelijkingen opstellen waaruit we een combinatie van a, b, c en d oplossen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ en $C = (0, 1, 0)$. Voor we aan de slag gaan delen we eerst in vergelijking 29 door d om één onbekende weg te werken

$v : a/dx + b/dy + c/dz = 1$. Vervolgens hernoemen we de breuken tot respectievelijk r, s en t, dit levert: $v : rx + sy + tz = 1$. Het stelsel vergelijkingen waarmee we aan de slag moeten krijgen we door ieder punt in te vullen:

$$\begin{cases} r + 2s + 3t &= 1 \\ 3r + 2s + t &= 1 \\ s &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r + 3t &= -1 \\ 3r + t &= -1 \\ s &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r &= -1 - 3t \\ 3(-1 - 3t) + t &= -1 \\ s &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r &= -1 - 3t \\ -8t &= 2 \\ s &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r &= -1/4 \\ t &= -1/4 \\ s &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$v : -1/4x + y - 1/4z = 1 \Leftrightarrow$$

$$v : -x + 4y - z = 4.$$

In het voorbeeld van de vectorvoorstelling hebben we dezelfde punten genomen. Bovenstaande vergelijking en de vectorvoorstelling:

$$v : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zijn dus twee verschillende voorstellingen voor het zelfde vlak.

Bij een lijn in konden we overstappen van de vectorvoorstelling gebruikmakend van de vergelijking in de vorm van het inproduct 15 $l :< \vec{n}_l, \vec{X} >=< \vec{n}_l, \vec{A} >$. De normaalvector van de lijn $\vec{n}_l$ stond daar loodrecht op de richtingsvector $\vec{r}_l$.

Opdracht: Noem $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ de vector van de coëfficienten a, b en c uit het voorbeeld. Laat zien dat $< \vec{n}_v, \vec{r}_1 >= 0$ en $< \vec{n}_v, \vec{r}_2 >= 0$ en $< \vec{n}_v, \vec{s} >= 4$, waarin $\vec{r}_1$,$\vec{r}_2$ en $\vec{s}$ respectievelijk de richtingsvectoren en de steunvector zijn uit het voorbeeld.

De vector van coëfficienten staat dus loodrecht op de richtingsvectoren van het vlak. Een vector loodrecht op een vlak noemen we de **normaalvector** van een vlak.

Ook hier lijkt het dus mogelijk een vlak met behulp van het inproduct van vectoren te definiéren:

$$v :< \vec{n}_v, \vec{X} >=< \vec{n}_v, \vec{A} > \tag{30}$$

De vraag rest hoe je gegeven twee richtingsvectoren van een vlak een normaalvector van het vlak berekent. We presenteren hier een afleiding met behulp van de definitie van het inproduct. Laten $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ twee gegeven richtingsvectoren van een vlak v zijn en laat $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ de normaalvector van het vlak zijn. Omdat de normaalvector loodrecht op het vlak staat moet de normaalvector ook loodrecht op iedere richtingsvector in het vlak staan (waarom?). Er moet dus gelden:

$$< \vec{n}_v, \vec{r}_1 >= 0 \wedge \ < \vec{n}_v, \vec{r}_2 >= 0.$$

Dit leidt tot een stelsel van twee vergelijkingen met de drie onbekenden n_x, n_y en n_z. Omdat een normaalvector verschillende lengten kan hebben is het niet nodig n_x, n_y en n_z precies te bepalen. Het stelsel is:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} an_x + bn_y + cn_z & = & 0 \\ dn_x + en_y + fn_z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} afn_x + bfn_y + cfn_z & = & 0 \\ cdn_x + cen_y + cfn_z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} afn_x + bfn_y + cfn_z & = & 0 \\ (af - cd)n_x + (bf - ce)n_y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n_z & = & -\frac{afn_x + bfn_y}{cf} \\ n_y & = & -\frac{af - cd}{bf - ce} n_x \end{array} \right.$$

Kies nu $n_x = bf - ce$ dan is $n_y = -af + cd$ en

$n_z = -\frac{af(bf-ce)+bf(-af+cd)}{cf} = -\frac{afbf-afce-bfaf+bfcd}{cf} = -(-ae+bd) = ae - bd.$

Een normaalvector van een vlak met richtingsvectoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ is dus de vector

$$\vec{n}_v = \begin{pmatrix} bf - ce \\ -(af - cd) \\ ae - bd \end{pmatrix} \tag{31}$$

Dit resultaat noemt men het **uitproduct** van de twee vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$. De wiskundige notatie voor het uitproduct van twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ is:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \tag{32}$$

Voorbeelden

- Gegeven zijn de vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bepaal het uitproduct $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Oplossing:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Gegeven zijn weer de punten $A = (1,2,3)$, $B = (3,2,1)$ en $C = (0,1,0)$. Geef een vergelijking van het vlak in de vorm $v : ax + by + cz = d$. Oplossing: We gebruiken de inproduct notatie $v :< \vec{n}_v, \vec{X} >=< \vec{n}_v, \vec{A} >$. Daartoe moeten we eerst de normaalvector bepalen met behulp van twee richtingsvectoren. Kies bijvoorbeeld de richtingsvectoren $\vec{r}_1 = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_2 = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Een normaalvector is dan het uitproduct

$$\vec{n}_v = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-1) \\ -2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Een vergelijking voor het vlak is nu $v :< \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} >$

of wel $v : -2x + 8y - 2z = -2 + 16 - 6 = 8$. Beide zijden door twee delen levert:

$$v : -x + 4y - z = 4.$$

De vergelijking van het vlak die we al eerder hebben gevonden.

Opgaven:

18. Gegeven zijn de vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bepaal de uitproducten $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ en $\vec{t} = \vec{v} \times \vec{u}$. Wat is de relatie tussen $\vec{w}$ en $\vec{t}$.
19. Gegeven zijn de punten $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ en $C = (2, 1, 0)$. Geef een vergelijking van het vlak in de vorm $v : ax + by + cz = d$.
20. Gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ en $C = (0, 0, 0)$. Geef een vergelijking van het vlak in de vorm $w : ax + by + cz = d$.
21. Gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ en $C = (-1, -1, -1)$. Geef zowel een vergelijking van het vlak in de vorm $v : ax + by + cz = d$ en een vectorvoorstelling van v.
22. Gegeven is het vlak $w : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Geef een vergelijking van het vlak in de vorm $w : ax + by + cz = d$
23. Bewijs $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
24. Zoek uit wat het uitproduct heeft te maken met de kurkentrekker- of rechterhandregel.
25. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.6 snijpunt lijn en vlak in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ zijn er 3 mogelijkheden voor de ligging van een lijn ten opzichte van een vlak. Een lijn snijdt een vlak. Een lijn ligt in een vlak of een lijn is evenwijdig met een vlak. Hieronder geven we aan hoe je dit bepaalt.

Gegeven is de lijn $l : P = \vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l$ en het vlak $v : Q = \vec{s}_v + \mu\vec{r}_{v1} + \gamma\vec{r}_{v2}$. Probleem: Bepaal het (eventuele)snijpunt S van lijn l met het vlak v.

Oplossing:
We moeten een λ, μ en γ door het volgende systeem van drie vergelijkingen met drie onbekenden op te lossen:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_{lx} + \lambda r_{lx} & = & s_{vx} + \mu r_{v1x} + \gamma r_{v2x} \\ s_{ly} + \lambda r_{ly} & = & s_{vy} + \mu r_{v1y} + \gamma r_{v2y} \\ s_{lz} + \lambda r_{lz} & = & s_{vz} + \mu r_{v1z} + \gamma r_{v2z} \end{array}\right.$$

Voorbeelden:

- Gegeven is de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het vlak $v : Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Oplossing:
  Het stelsel dat we moeten oplossen is:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 - 1\lambda & = & 2 + \gamma \\ 2 + \lambda & = & 1 + \mu - \gamma \\ 1 + \lambda & = & 1 + \mu + \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 - 1\lambda & = & \gamma \\ 1 + \lambda & = & \mu - \gamma \\ \lambda & = & \mu + \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 - 1\lambda & = & \gamma \\ 1 + \lambda & = & \mu - (1 - 1\lambda) \\ \lambda & = & \mu + (1 - 1\lambda) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma & = & 1 - 1\lambda \\ 2 & = & \mu \\ 2\lambda & = & \mu + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \gamma & = & 1 - 1\lambda \\ \mu & = & 2 \\ 2\lambda & = 3 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \gamma & = & -\frac{1}{2} \\ \mu & = & 2 \\ \lambda & = \frac{3}{2} & \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Gegeven is de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en het vlak $v : Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Oplossing:
  Het stelsel dat we moeten oplossen is:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 - 1\lambda & = & 2 + \gamma \\ 2 + \lambda & = & 1 + \mu - \gamma \\ 1 - \lambda & = & 1 + \mu + \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 - 1\lambda & = & \gamma \\ 1 + \lambda & = & \mu - \gamma \\ -\lambda & = & \mu + \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 - 1\lambda & = & \gamma \\ 1 + \lambda & = & \mu - (1 - 1\lambda) \\ -\lambda & = & \mu + (1 - 1\lambda) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \gamma &= 1-1\lambda \\ 2 &= \mu \\ 0 &= \mu+1 \end{cases}$$

μ heeft nu twee oplossingen hetgeen niet mogelijk is. Het stelsel is niet oplosbaar. Mogelijkerwijs ligt l in v. Dan moet de steunvector $\vec{s}_l$ van l ook in dit vlak liggen. Dit is alleen mogelijk als het volgende systeem een oplossing heeft

$$\begin{cases} 3 &= 2+\gamma \\ 2 &= 1+\mu-\gamma \\ 1 &= 1+\mu+\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 &= 2+\gamma \\ 2 &= 1+\mu-\gamma \\ 1 &= 1+\mu+\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= \gamma \\ 2 &= 1+\mu-1 \\ 1 &= 1+\mu+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= \gamma \\ 2 &= \mu \\ -1 &= \mu \end{cases}$$

Ook dit klopt niet dus lijn l is evenwijdig met v.

- Gegeven is de lijn $l : P = \vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l$ en het vlak $w : ax + by + cz = d$. Probleem: Bepaal het (eventuele)snijpunt S van lijn l met het vlak w.
  Oplossing:
  We maken gebruik van de inproduct notatie 30 voor het vlak w. $w :< \vec{n}_w, \vec{X} >= d$. Omdat de lijn moet snijden kunnen we de vector $\vec{X}$ vervangen door $\vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l$. Dit geeft de vergelijking:

  $$< \vec{n}_w, (\vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l) >= d$$

  Hieruit moeten we λ oplossen. We gebruiken daartoe de eigenschappen van het inproduct ($< \vec{u}, (\vec{v}+\vec{w}) >=< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} >$ en $< \vec{u}, a\vec{v} >= a < \vec{u}, \vec{v} >$) om bovenstaande vergelijking te herschrijven:

  $$< \vec{n}_w, \vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l >=$$

  $$< \vec{n}_w, \vec{s}_l > +\lambda < \vec{n}_w, \vec{r}_l >= d \Rightarrow$$

  $$\lambda = \frac{d- < \vec{n}_w, \vec{s}_l >}{< \vec{n}_w, \vec{r}_l >} \tag{33}$$

  Een unieke oplossing bestaat alleen als $< \vec{n}_w, \vec{r}_l >\neq 0$. Is $< \vec{n}_w, \vec{r}_l >= 0$, dan staat de normaalvector van w loodrecht op de richtingsvector van l, ofwel de richting van l is bevat in de richtingen van het vlak w. De lijn ligt volledig in het vlak als en $< \vec{n}_w, \vec{r}_l >= 0$ en bovendien geldt $< \vec{n}_w, \vec{s}_l >= d$ ofwel de steunvector $\vec{s}_l$ van l wijst naar een punt in het vlak.

Voorbeelden

- Gegeven is de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het vlak $v : 2x + y - z = 4$.
  Bereken de coördinaten van het snijpunt van l met v.
  Oplossing:
  Normaalvector vlak v is $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. λ vinden we uit

  $$\lambda = \frac{d - < \vec{n}_v, \vec{s}_l >}{< \vec{n}_v, \vec{r}_l >} = \frac{4 - (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1)}{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1} = \frac{4 - 7}{-2} = \frac{3}{2}.$$

  Het snijpunt S krijgen we uit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
  Dus $S = (1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$. Controleer dit door S in de vergelijking voor w in te vullen.

- Gegeven is de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en het vlak $v : 2x + y - z = 4$.
  Bereken de coördinaten van het snijpunt van l met v.
  Oplossing:
  Normaalvector vlak v is $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. λ vinden we uit

  $$\lambda = \frac{d - < \vec{n}_v, \vec{s}_l >}{< \vec{n}_v, \vec{r}_l >} = \frac{4 - (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1)}{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)} = \frac{4 - 7}{0}.$$

  Oeps: Delen door nul is flauwekul. Ligt de lijn in het vlak?

  $$< \vec{n}_v, \vec{s}_l > = 7 \neq 4.$$

  De lijn ligt niet in het vlak maar is evenwijdig.

Welke methode je kiest mag natuurlijk niet uitmaken voor het resultaat. Bepaal zelf welke strategie je het prettigst vindt.

Opgaven:

Bepaal de ligging van de lijn t.o.v het vlak. Geef waar mogelijk de coördinaten van het snijpunt.

26. Lijn $l : P = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en vlak $v : x + y - z = 9$.

27. Lijn $l : P = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en vlak $v : -x + 2y - z = 8$.

28. Lijn $l : P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en vlak $v : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

29. Lijn $l : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en vlak $v : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

30. Lijn $l : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ en vlak $v : 4x + y - 2z = 5$.

31. Gegeven zijn de punten $A = (0, 0, 2)$,$B = (1, 1, 2)$,$C = (2, 1, 1)$,$D = (6, 3, 8)$,$E = (2, 1, 2)$. Bepaal de coördinaten van het snijpunt van het vlak door de punten A, B en C met de lijn door de punten D en E.

32. Gegeven zijn de lijn $l : P = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en vlak $v : 2x - y - 2z = 2$. Voor welke a en b ligt lijn l in vlak v.

33. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.7 Snijlijn twee vlakken in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ zijn er 3 mogelijkheden voor de ligging van een vlak ten opzichte van een ander vlak. De vlakken snijden volgens een lijn. De vlakken zijn evenwijdig of vallen samen. Hieronder geven we aan hoe je dit bepaalt.

Gegeven de vlakken $v : ax + by + cz = d$ en $w : ex + fy + gz = h$. Probleem: Bepaal de ligging van de vlak v t.o.v vlak w. Als de vlakken snijden geef dan een vectorvoorstelling van de lijn.
Oplossing:
Eerst merken we op dat als de vlakken evenwijdig zijn de normaalvectoren van v en w op één lijn liggen, ofwel $\vec{n}_v = \alpha\vec{n}_w$ voor een bepaalde constante α. Als dat het geval is kies dan een punt in v en kijk of dit voldoet aan de vergelijking voor w. Als dat waar is dan vallen de vlakken samen zo niet dan zijn ze evenwijdig.

Als $\vec{n}_v \neq \alpha\vec{n}_w$ dan vinden we een vergelijking voor de lijn uit het stelsel:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz &=& d \\ ex+fy+gz &=& h \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aex+bey+cez &=& de \\ aex+afy+agz &=& ah \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aex+bey+cez &=& de \\ (be-af)y+(ce-ag)z &=& de-ah \end{array}\right.$$

Kies nu bijvoorbeeld $z = \lambda$, dan is $y = \frac{de-ah-\lambda(ce-ag)}{be-af} = \frac{de-ah}{be-af} - \frac{\lambda(ce-ag)}{be-af}$. Invullen in de bovenste vergelijking levert:

$$aex + be(\frac{de-ah}{be-af} - \frac{\lambda(ce-ag)}{be-af}) + ce\lambda = de$$

$$\begin{aligned} aex &= -be\frac{de-ah}{be-af} + be\frac{\lambda(ce-ag)}{be-af} - ce\lambda + de \Leftrightarrow \\ &= de - be\frac{de-ah}{be-af} + \lambda(be\frac{ce-ag}{be-af} - ce) \Leftrightarrow \\ &= \frac{de(be-af)-be(de-ah)}{be-af} + \lambda\frac{be(ce-ag)-ce(be-af)}{be-af} \Leftrightarrow \\ &= \frac{-deaf+beah}{be-af} + \lambda\frac{-beag+ceaf}{be-af} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{-df+bh}{be-af} + \lambda\frac{-bg+cf}{be-af} \end{aligned}$$

Een vectorvoorstelling voor de snijlijn s is nu:

$$s : P = \begin{pmatrix} \frac{-df+bh}{be-af} \\ \frac{de-ah}{be-af} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{-bg+cf}{be-af} \\ \frac{-ce+ag}{be-af} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden:

- Gegeven zijn de vlakken $v : 2x - y - z = 4$ en $w : x + y + z = 5$. Bepaal de ligging van de vlak v t.o.v vlak w. Als de vlakken snijden geef dan een vectorvoorstelling van de lijn.
  Oplossing:
  De vlakken zijn niet evenwijdig want er is geen constante α te vinden zodanig dat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Snijlijn:
  $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 4 \\ x + y + z &=& 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 4 \\ 3x &=& 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6 - y - z &=& 4 \\ x &=& 3 \end{array} \right.$$
  Kies $z = \lambda$ dan is $y = 2 - \lambda$. Een vergelijking voor de snijlijn is dan:
  $$s : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Gegeven zijn de vlakken $v : 2x - y - z = 4$ en $w : -4x + 2y + 2z = -10$. Bepaal de ligging van de vlak v t.o.v vlak w. Als de vlakken snijden geef dan een vectorvoorstelling van de lijn.
  Oplossing:
  De vlakken zijn evenwijdig want $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  Kies $x = 0$ en $y = 0$, dan ligt voor $z = -4$ het punt $P = (0, 0, -4)$ in v. Invullen in w levert $-8 = -10$, hetgeen niet waar is. De vlakken zijn dus evenwijdig.

In het geval van vlakken gegeven als vectorvoorstelling kun je de vlakken eerst omzetten als vergelijking en dan het bovenstaande recept afwerken. Je kunt ook de vectorvoorstellingen aan elkaar gelijkstellen zoals dat is gedaan bij het vinden van een snijpunt van een lijn en een vlak, maar dat is zeker niet sneller.

Voorbeeld:

Gegeven zijn de vlakken $v : P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en
$w : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Bepaal een vectorvoorstelling van de snijlijn s.
Oplossing:
Eerst stappen we over op vergelijkingen van de vlakken. Daar moeten de normaalvectoren $\vec{n}_v$ en $\vec{n}_w$ van de vlakken v en w voor worden bepaald:

$$\begin{aligned} \vec{n}_v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-2) \\ -1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De vergelijking voor vlak v wordt dan:

$$\begin{aligned} v : &\quad < \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \Rightarrow \\ v : &\quad 6y - 4z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_w &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - 2 \cdot (1) \\ -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot (1) - 0 \cdot (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De vergelijking voor vlak w wordt dan:

$$\begin{aligned} w : &\quad < \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \\ w : &\quad -2x + 2y + z = 1 \end{aligned}$$

Vervolgens lossen we het stelsel vergelijkingen op:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6y-4z &=& 0 \\ -2x+2y+z &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3y &=& 2z \\ -2x+2y+\frac{3}{2}y &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3y &=& 2z \\ -2x &=& 1-3\frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

Kies $y = 4\lambda$, dan is $z = 6\lambda$ en $x = -\frac{1}{2} + 7\lambda$. Een vectorvoorstelling voor de lijn s is dan:

$$s : P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+7\lambda \\ 4\lambda \\ 6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Opgaven:

Geef een vectorvoorstelling van de snijlijn van de volgende vlakken:

34. $v : -x+3y+2z = -2$ en $w : 2x+6y-z = 3$
35. $t : -3x+y-3z = 1$ en $u : y+z = 3$
36. $a : -\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-z = 1$ en $b : x+4y+z = 2$
37. $c : x+2y+3z = 4$ en $d : 5x+6y+7z = 8$
38. $v : P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en
    $w : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
39. $v : P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ en
    $w : Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
40. $v : P = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en
    $w : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

41. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.8 Hoeken in 3D

Definitie:De hoek tussen twee snijdende lijnen of twee kruisende lijnen is gelijk aan aan de scherpe hoek tussen de twee richtingsvectoren van die lijnen.
Definitie:Onder de hoek tussen twee vlakken verstaan we de kleinste hoek tussen de twee vlakken.
Opdracht: Maak aannemelijk dat deze hoek is gelijk aan de scherpe hoek tussen de lijnen waarop de normaalvectoren van die vlakken liggen.
Definitie:Onder de hoek tussen een lijn en een vlak verstaan we de kleinste hoek tussen die lijn en het vlak.
Opdracht: Maak aannemelijk dat deze hoek is gelijk aan 90 graden min de scherpe hoek tussen de richtingsvector van de lijn en de normaalvectoren van het vlak.

Voorbeelden:

- Gegeven zijn de vlakken $v : 2x - y - z = 4$ en $w : -4x + 2y + 4z = -10$. Bepaal de hoek tussen deze twee vlakken in graden nauwkeurig.
  Oplossing: We gebruiken de eigenschap van het inproduct van twee vectoren in een orthonormaal-assenstelsel 12.

  $$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta)$$

  We kunnen dit herschrijven tot

  $$\cos(\theta) = \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

  De normaalvectoren van v en w zijn respectievelijk
  $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{n}_w = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
  Invullen in bovenstaande vergelijking geeft:

  $$\cos(\theta) = \frac{2 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{16+4+16}} = \frac{-14}{6\sqrt{6}} \Rightarrow$$

  $$\theta = \cos^{-1}(\frac{-7}{3\sqrt{6}}) \approx 119^\circ \Rightarrow$$

Deze hoek is groter dan 90°. De scherpe hoek tussen de twee vlakken is dus $180 - 119 = 61°$.

- Gegeven is het vlak $v : 2x - y - z = 4$ en de lijn $l : P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bepaal de hoek tussen de lijn en het vlak in graden nauwkeurig.
Oplossing: De hoek tussen een lijn en een vlak is 90° min de scherpe hoek tussen de richtingsvector van de lijn $\vec{r_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en de normaalvector van het vlak $\vec{n_v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\theta = 90 - \cos^{-1}\left(\frac{< \vec{r_l}, \vec{n_v} >}{|\vec{r_l}||\vec{n_v}|}\right) = 90 - \cos^{-1}\left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{4+1+1}}\right) =$$

$$90 - \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) \approx 90 - 71 = 19°.$$

Opgaven:

42. Gegeven zijn de lijnen $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en m.

43. Gegeven zijn de lijn $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het vlak $v : 2x + 3y - z = 5$.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en v.

44. Gegeven zijn de vlakken $v : 2x + 3y - z = 5$ en $w : -x + y - z = 1$. Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en m.

45. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.9 Afstanden

In 3D zijn er de volgende afstand begrippen: de afstand tussen twee punten, de afstand tussen een punt en een vlak, de afstand tussen een punt en een lijn en de afstand tussen 2 kruisende lijnen.

3.9.1 afstand tussen twee punten

Evenals in 2D is de afstand $d(A, B)$ tussen twee punten A en B in een orthonormaal-assenstelsel van 3 dimensies (of hoger) gedefinieerd als de lengte van de vector van A naar B:

$$|\vec{v}_{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{< \vec{B} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{A} >}. \tag{34}$$

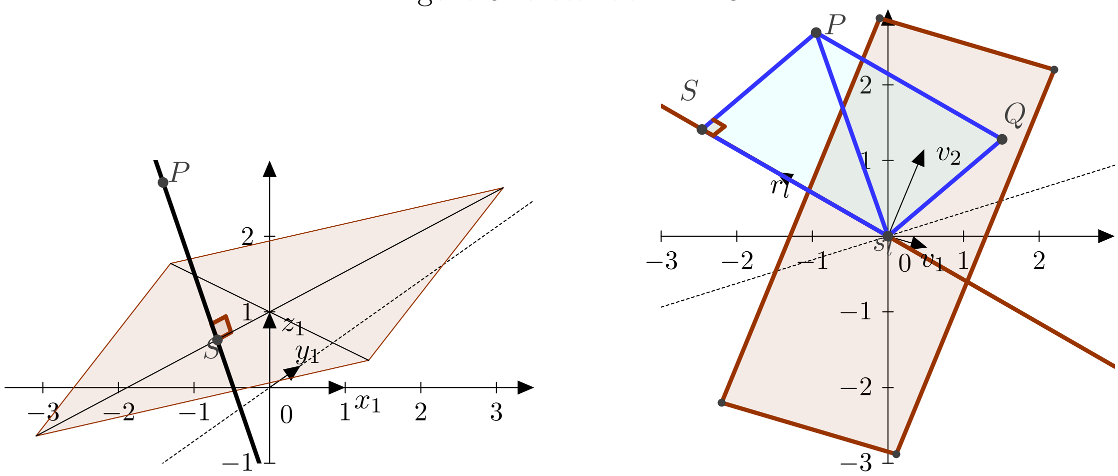
In drie dimensies is dit gelijk aan

$$|\vec{v}_{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{35}$$

3.9.2 afstand tussen een vlak en een punt

De afstand $d(P, v)$ tussen een vlak v en een punt P in 3D (zie linker plaatje in figuur 6)is gedefinieerd als de kortste weg van een punt naar het vlak. Deze kortste weg is over de loodlijn op de lijn v door het punt P.
Opdracht: Leg dit uit!

Figure 6: afstanden in $\mathbb{R}3$



afstand punt vlak Open afstandpuntvlak.ggb

afstand punt lijn Open afstandpuntlijn.ggb

Hier zullen we een formule afleiden waarmee direct de afstand van een punt tot een vlak kan worden berekend. Deze afleiding is analoog (gelijke redenering) aan de afleiding in 2D. We maken weer gebruik van de inprodukt notatie dit maal een voor vlak, de normaalvector van het vlak en een vectorvoorstelling van een lijn. Laat het vlak v gegeven zijn door de vergelijking

$$v :< \vec{n}_v, \vec{x} >= d,$$

waarin $\vec{n}_v$ de normaalvector van lijn v. De normaalvector staat loodrecht op het vlak v en is dus de richtingsvector voor de loodlijn m op v. Op m moet het punt P liggen. Een vectorvoorstelling voor m is dan:

$$m : \vec{Q} = \vec{P} + \lambda \vec{n}_l.$$

De afstand van P tot v is gelijk aan de afstand tussen P en het snijpunt S van vlak v en lijn m. Om het snijpunt te vinden bepalen we λ door formule **??** te gebruiken

$$\lambda = \frac{d- < \vec{n}_l, \vec{P} >}{< \vec{n}_v, \vec{n}_v >} \tag{36}$$

Het punt snijpunt S wordt dan:

$$\vec{S} = \vec{P} + \frac{d- < \vec{n}_v, \vec{P} >}{< \vec{n}_v, \vec{n}_v >}\vec{n}_v \tag{37}$$

De afstand $d(P, v)$ is gelijk aan de afstand $d(P, S)$:

$$d(P, S) = |\vec{S} - \vec{P}| = |\frac{d- < \vec{n}_v, \vec{P} >}{< \vec{n}_v, \vec{n}_v >}\vec{n}_v| = |\frac{d- < \vec{n}_v, \vec{P} >}{< \vec{n}_v, \vec{n}_v >}| \cdot |\vec{n}_v| = \frac{|d- < \vec{n}_v, \vec{P} > |}{|\vec{n}_v|} \tag{38}$$

Voorbeeld

- Gegeven het vlak $v : 3x + 4y + 5z = 10$ en het punt $P(2, 6, -2)$. Bereken de afstand van P tot v.
  Oplossing: $d(P, v) = \frac{|10-(3\cdot2+4\cdot6+5\cdot(-2))|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{|-10|}{5\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Opgaven

46. Gegeven zijn de punten $P(1, 2, 3)$ en $Q(1, 2, -2)$. Bereken exact de afstand van P tot Q.

47. Gegeven zijn het vlak $v : x + y + z = 3$ en het punt $P(1, 2, -2)$. Bereken exact de afstand van P tot v.

48. Gegeven zijn het vlak $v : 2x + z = 1$ en het punt $P(1, 100, -2)$. Bereken exact de afstand van P tot v.

49. Gegeven zijn het vlak $v : -x + 2y + z = c$ en de punten $P(3, 1, 2)$ en $Q(5, 6, 6)$. Bereken exact de waarde(n) voor c waarvoor $d(P, v) = d(P, Q)$.

50. Gegeven zijn het vlak $v : ax + y + z = 2$ en het punt $P(1, 1, 1)$. Bereken exact de waarde(n) voor a waarvoor $d(P, v) = \frac{1}{3}$.

51. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.9.3 afstand tussen een punt en een lijn

De afstand $d(P, l)$ tussen een lijn l en een punt P in 3D is gedefinieerd als de kortste weg van een punt naar de lijn. De kortste weg is over het vlak v door het punt P loodrecht op l.

Hier zullen we een formule afleiden waarmee direct de afstand van een punt tot een lijn kan worden berekend. We maken weer gebruik van de inproduct notatie ditmaal voor het vlak v door P loodrecht op l. Laat de lijn l gegeven zijn door de vectorvoorstelling

$$l : \vec{Q} = \vec{s}_l + \lambda \vec{r}_l$$

De richtingsvector van l is de normaalvector van het vlak v door P. De vergelijking voor v is (verklaar waarom!)

$$v :< \vec{r}_l, \vec{x} >=< \vec{r}_l, \vec{P} > .$$

Het snijpunt S van v en l krijgen we weer door λ uit te rekenen met het in vullen van l in v:

$$\begin{aligned}
< \vec{r}_l, (\vec{s}_l + \lambda \vec{r}_l) > &= < \vec{r}_l, \vec{P} > \Leftrightarrow \\
< \vec{r}_l, \vec{s}_l > + \lambda < \vec{r}_l, \vec{r}_l > &= < \vec{r}_l, \vec{P} > \Leftrightarrow \\
\lambda < \vec{r}_l, \vec{r}_l > &= < \vec{r}_l, \vec{P} > - < \vec{r}_l, \vec{s}_l > \\
\lambda &= \frac{< \vec{r}_l, \vec{P} > - < \vec{r}_l, \vec{s}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} = \frac{< \vec{r}_l, \vec{P} - \vec{s}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}
\end{aligned}$$

Het snijpunt S wordt dan:

$$\vec{S} = \vec{s}_l + \frac{< \vec{r}_l, \vec{P} > - < \vec{r}_l, \vec{s}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} \vec{r}_l \tag{39}$$

De afstand $d(P,l)$ is weer gelijk aan de afstand $d(P,S)$:

$$d(P,l) = d(P,S) = |\vec{P} - \vec{S}| = \sqrt{<(\vec{P} - \vec{S}), (\vec{P} - \vec{S})>} \tag{40}$$

We berekenen nu eerst het inproduct $<(\vec{P} - \vec{S}), (\vec{P} - \vec{S})>$.

$$\begin{aligned}
<(\vec{P} - \vec{S}), (\vec{P} - \vec{S})> &= <(\vec{P} - \vec{S}), (\vec{P} - \vec{s_l} - \lambda\vec{r_l})> \\
&= <(\vec{P} - \vec{S}), (\vec{P} - \vec{s_l})> \ (\texttt{want}(\vec{P} - \vec{S}) \perp \vec{r_l}) \\
&= <(\vec{P} - \vec{s_l} - \lambda\vec{r_l}), (\vec{P} - \vec{s_l})> \\
&= <(\vec{P} - \vec{s_l}), (\vec{P} - \vec{s_l})> \\
&\quad -\lambda <\vec{r_l}, (\vec{P} - \vec{s_l})> \\
&= <(\vec{P} - \vec{s_l}), (\vec{P} - \vec{s_l})> \\
&\quad -\frac{(<\vec{r_l}, \vec{P} - \vec{s_l}>)^2}{<\vec{r_l}, \vec{r_l}>}
\end{aligned}$$

De afstand $d(P,l)$ is nu:

$$d(P,l) = \sqrt{<(\vec{P} - \vec{s_l}), (\vec{P} - \vec{s_l})> - \frac{(<\vec{r_l}, \vec{P} - \vec{s_l}>)^2}{<\vec{r_l}, \vec{r_l}>}} \tag{41}$$

Merk op dat dit gelijk is aan $\sqrt{OP^2 - QP^2} = \sqrt{|\vec{P} - \vec{s_l}|^2 - d(\vec{P} - \vec{s_l}, v)^2}$ in figuur 6.

Voorbeeld

- Gegeven is de lijn $l : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en het punt $P(3,1,2)$. Bereken exact de afstand van P tot l.

  Oplossing: $d(P,l) = \sqrt{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 - \frac{(1\cdot2+4\cdot1+2\cdot1)^2}{1+16+4}} = \sqrt{6 - \frac{64}{21}} = \sqrt{2\frac{20}{21}} = \sqrt{\frac{62}{21}}$

Opgaven

52. Gegeven is de lijn $l : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het punt $P(1,0,0)$. Bereken exact de afstand van P tot l.

53. Gegeven is de lijn $l : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ en het punt $P(2,5,0)$. Bereken exact de afstand van P tot l.

54. Gegeven zijn de punten $P(2,5,-3)$, $Q(1,0,0)$ en $R(1,3,4)$. Bereken exact de oppervlakte van de driehoek $\triangle PQR$

55. Gegeven is de lijn $l : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en het punt $P(0,4,0)$. Bereken exact de waarde voor a waarvoor afstand $d(P,l) = 3$.

56. Gegeven is het viervlak $ABCD$. Definieer $\vec{r}_1 = \vec{B} - \vec{A}$, $\vec{r}_2 = \vec{C} - \vec{A}$, $\vec{r}_3 = \vec{D} - \vec{A}$ en $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ Stelling: Op basis van het inproduct is de formule voor de inhoud I_{ABCD} van het viervlak gelijk aan:

$$I_{ABCD} = \frac{1}{6}\sqrt{<\vec{r}_2,\vec{r}_2><\vec{r}_1,\vec{r}_1> - (<\vec{r}_1,\vec{r}_2>)^2}\frac{|<\vec{n},\vec{r}_3>|}{|\vec{n}|} \qquad (42)$$

Bewijs deze stelling (Tip: zie opgaven bij afstand tussen een lijn en een punt (2.8.2)

57. Gegeven zijn de punten $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ en $D(1,1,1)$. Bereken de inhoud van het viervlak $ABCD$

58. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

3.9.4 afstand tussen twee kruisende lijnen

De afstand $d(l,m)$ tussen twee kruisende lijnen l en m in 3D is gedefinieerd als de lengte van het kortste lijnstuk dat l met m verbindt. Laat Q het eindpunt van dit lijnstuk zijn op l en P het eindpunt van dit lijnstuk op m.

In de vorige sectie, de afstand van een punt P tot een lijn l, maakten we een vlak $v$loodrecht op l door P. Als snijpunt S van l en v dan moet ook $\vec{P} - \vec{S}$ loodrecht op l staan. Het punt S dat we zoeken moet dan gelijk zijn aan het punt Q, zodat $\vec{P} - \vec{Q}$ loodrecht op l staat. Evenzo moet gelden dat $\vec{P} - \vec{Q}$ loodrecht op m moet staan.

Laat $l : \vec{Q} = \vec{s}_l + \lambda\vec{r}_l$ en $m : \vec{P} = \vec{s}_m + \mu\vec{r}_m$ de vectorvoorstellingen voor de lijnen l en m. De opdracht is nu het vinden van λ en μ waarvoor de verschilvector $\vec{P} - \vec{Q}$

loodrecht op beide lijnen staat ofwel

$$< \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_l >= 0 \wedge \ < \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_m >= 0$$

We beginnen met $< \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_l >= 0$ op te lossen door het invullen van de vergelijkingen voor $\vec{P}$ en $\vec{Q}$.

$$\begin{aligned} < \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_l > &= 0 \Rightarrow \\ < \vec{s}_m + \mu\vec{r}_m - \vec{s}_l - \lambda\vec{r}_l, \vec{r}_l > &= 0 \Rightarrow \\ < \vec{s}_m - \vec{s}_l + \mu\vec{r}_m, \vec{r}_l > -\lambda < \vec{r}_l, \vec{r}_l > &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l + \mu\vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} = \frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} + \mu\frac{< \vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} \tag{43}$$

Hetzelfde doen we voor $< \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_m >= 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= < \vec{P} - \vec{Q}, \vec{r}_m > \\ &= < \vec{s}_m + \mu\vec{r}_m - \vec{s}_l - \lambda\vec{r}_l, \vec{r}_m > \\ &= < \vec{s}_m - \vec{s}_l + \mu\vec{r}_m - \left(\frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} + \mu\frac{< \vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}\right)\vec{r}_l, \vec{r}_m > \\ &= < \vec{s}_m - \vec{s}_l - \left(\frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}\right)\vec{r}_l + \mu\left(\vec{r}_m - \frac{< \vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}\vec{r}_l\right), \vec{r}_m > \\ &= < \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_m > - \left(\frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}\right) < \vec{r}_l, \vec{r}_m > \\ &\quad +\mu\left(< \vec{r}_m, \vec{r}_m > - \frac{< \vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} < \vec{r}_l, \vec{r}_m >\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_m > - \left(\frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}\right) < \vec{r}_l, \vec{r}_m >}{< \vec{r}_m, \vec{r}_m > - \frac{< \vec{r}_m, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_l, \vec{r}_l >} < \vec{r}_l, \vec{r}_m >} \\ &= \frac{< \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l >< \vec{r}_l, \vec{r}_m > - < \vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_m >< \vec{r}_l, \vec{r}_l >}{< \vec{r}_m, \vec{r}_m >< \vec{r}_l, \vec{r}_l > - < \vec{r}_m, \vec{r}_l >^2} \end{aligned} \tag{44}$$

De afstand $d(l, m)$ is gelijk aan de afstand $d(P, Q)$:

$$d(l, m) = d(P, Q) = |\vec{P} - \vec{Q}| = \sqrt{< (\vec{P} - \vec{Q}), (\vec{P} - \vec{Q}) >} \tag{45}$$

We berekenen nu eerst weer het inproduct $<(\vec{P}-\vec{Q}),(\vec{P}-\vec{Q})>$.

$$
\begin{aligned}
&<(\vec{P}-\vec{Q}),(\vec{P}-\vec{Q})> \\
\\
= \;& <(\vec{P}-\vec{Q}),(\vec{s}_m+\mu\vec{r}_m-\vec{s}_l-\lambda\vec{r}_l)> \\
= \;& <(\vec{P}-\vec{Q}),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> (\texttt{want}(\vec{P}-\vec{Q}) \perp \vec{r}_l \texttt{en} \vec{r}_m) \\
= \;& <(\vec{s}_m+\mu\vec{r}_m-\vec{s}_l-\lambda\vec{r}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
= \;& <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& +\mu <\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& -\lambda <\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
= \;& <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& +\mu <\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& -\left(\frac{<\vec{s}_m-\vec{s}_l,\vec{r}_l>}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>}+\mu\frac{<\vec{r}_m,\vec{r}_l>}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>}\right)<\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
= \;& <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& -\frac{<\vec{s}_m-\vec{s}_l,\vec{r}_l>^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>} \\
& +\mu\left(<\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> -\frac{<\vec{r}_m,\vec{r}_l>}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>}<\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)>\right) \\
= \;& <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& -\frac{<\vec{s}_m-\vec{s}_l,\vec{r}_l>^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>} \\
& +\mu\left(\frac{<\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)><\vec{r}_l,\vec{r}_l>-<\vec{r}_m,\vec{r}_l><\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)>}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>}\right) \\
= \;& <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> \\
& -\frac{<\vec{s}_m-\vec{s}_l,\vec{r}_l>^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>} \\
& +\frac{(<\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)><\vec{r}_l,\vec{r}_l>)^2-(<\vec{r}_m,\vec{r}_l><\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)>)^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>(<\vec{r}_m,\vec{r}_m><\vec{r}_l,\vec{r}_l>-<\vec{r}_m,\vec{r}_l>^2)}
\end{aligned}
$$

De afstand $d(l,m)$ tussen twee lijnen $l:\vec{Q}=\vec{s}_l+\lambda\vec{r}_l$ en $m:\vec{P}=\vec{s}_m+\mu\vec{r}_m$ is dus gelijk aan:

$$
d(l,m)=\sqrt{\begin{array}{l} <(\vec{s}_m-\vec{s}_l),(\vec{s}_m-\vec{s}_l)> -\frac{<\vec{s}_m-\vec{s}_l,\vec{r}_l>^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>} \\ +\frac{(<\vec{r}_m,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)><\vec{r}_l,\vec{r}_l>)^2-(<\vec{r}_m,\vec{r}_l><\vec{r}_l,(\vec{s}_m-\vec{s}_l)>)^2}{<\vec{r}_l,\vec{r}_l>(<\vec{r}_m,\vec{r}_m><\vec{r}_l,\vec{r}_l>-<\vec{r}_m,\vec{r}_l>^2)}\end{array}} \tag{46}
$$

Bovenstaande formule geldt in alle dimensies groter dan 2. In 3D kan er ook nog een andere eenvoudigere formule worden afgeleid. De afleiding gaat als volgt. Stel een vergelijking op van het vlak v door een van de lijnen evenwijdig aan de andere lijn. Het vlak dus door b.v, het eindpunt van $\vec{s}_l$ en opgespannen door de richtingsvectoren $\vec{r}_l$ en $\vec{r}_m$ van de twee lijnen. De gevraagde afstand tussen de twee lijnen is de afstand tussen het vlak en de lijn m, ofwel de aftand van het eindpunt van $\vec{s}_m$ tot v.

Opdracht: Leg uit waarom de afstand op deze manier kan worden berekend.

In formule vorm is dit:

$$d(l,m) = d(P,v) = \frac{|<\vec{n}_v, \vec{s}_m - \vec{s}_l>|}{|\vec{n}_v|} \tag{47}$$

Voorbeeld

- Gegeven zijn de lijnen $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Bereken exact de afstand van l tot m.

  Oplossing methode 1 $\vec{s}_l - \vec{s}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$d(l,m) = \sqrt{\begin{array}{c} <(\vec{s}_m - \vec{s}_l), (\vec{s}_m - \vec{s}_l)> - \frac{<\vec{s}_m - \vec{s}_l, \vec{r}_l>^2}{<\vec{r}_l, \vec{r}_l>} \\ + \frac{(<\vec{r}_m, (\vec{s}_m - \vec{s}_l)><\vec{r}_l, \vec{r}_l>)^2 - (<\vec{r}_m, \vec{r}_l><\vec{r}_l, (\vec{s}_m - \vec{s}_l)>)^2}{<\vec{r}_l, \vec{r}_l>(<\vec{r}_m, \vec{r}_m><\vec{r}_l, \vec{r}_l> - <\vec{r}_m, \vec{r}_l>^2)} \end{array}} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{2^2}{6} + \frac{0^2 - 2^2}{6\,(6 - 1^2)}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

  Oplossing methode 2: Vectorvoorstelling vlak v door O is

$$v : S = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  . normaalvector van v is $\vec{n}_v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{s}_m - \vec{s}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d(l,m) = d(P,v) = \frac{|<\vec{n}_v, \vec{s}_l - \vec{s}_m>|}{|\vec{n}_v|} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

Opgaven

59. Gegeven zijn de lijnen $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Bereken exact de afstand van l tot m.

60. Gegeven is de lijn $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en de punten $Q(0, 0, 1)$ en $R(1, 3, 4)$.
    Bereken exact de afstand van l tot de lijn door Q en R.

61. Gegeven zijn de lijnen $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $m : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    Bereken exact de afstand van l tot m.

62. gebruik methode 2 voor deze opgave. Gegeven zijn de lijnen $l : \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ en $m : \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bereken exact de waarden van a waarvoor $d(l, m) = 1$

63. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4 Transformaties: bewerkingen op vectoren

Je hebt eerder gezien dat het optellen van vectoren en het vermenigvuldigen van een vector met een getal leiden tot een andere vector. Ook kunnen we een willekeurig punt in een coördinatenstelsel weergeven als een vector waarin de elementen gelijk zijn aan de coördinaten van dat punt. In de meetkunde wil men vaak meer dingen met punten(en lijnstukken). Men wil puntenverzamelingen(tekeningen) kunnen spiegelen, roteren, vergroten en strekken. Kortom men wil tekeningen (originelen) kunnen veranderen in andere tekeningen (beelden). Dit proces noemen we een afbeelding of transformatie. Afbeeldingen waarbij rechte lijnen recht blijven noemt men **lineaire afbeeldingen** of **lineaire transformaties**.

De twee in de vorige alinea aangehaalde bewerkingen (optellen van een vector of scalaire vermenigvuldiging) zijn twee lineaire transformaties. Er is echter nog een andere klasse van lineaire afbeeldingen die we in de volgende sectie gaan behandelen.

4.1 Lineaire transformaties en matrices

Ook voor deze klasse lineaire afbeeldingen is er een algebraïsche aanpak ontwikkeld. Voordat we op betekenis ingaan definiëren we eerst een matrix.

Een **matrix** (meervoud: matrices)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

is een korte notatie voor een een rij getallen geordend in m rijen (horizontaal) en n kolommen (verticaal). Het getal dat zich in de i-de rij en de j-de kolom bevindt wordt genoteerd als a_{ij}. Een matrix $\mathbf{A}$ noemen we een vierkante matrix als $m = n$.

De **dimensie** van een matrix $\mathbf{A}$ met m rijen en n kolommen definiëren we als $m \times n$.

Hoewel er veel te zeggen is over niet vierkante matrices ligt het accent in deze tekst op vierkante matrices.

Opgaven:

1. Geef de dimensies van de volgende matrices A en geef de waarde van A_{31}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ (antwoord op http://www.wolframalpha.com)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.1.1 optellen van twee matrices

Als twee matrices **A** en **B** even groot zijn dat wil zeggen, beiden hebben m rijen en n kolommen, dan kunnen twee matrices bij elkaar worden opgeteld. Net als bij de vector optelling worden de overeenkomstige elementen bij elkaar opgeteld. Het resultaat is een matrix **C** met de zelfde dimensie als **A** en **B**.

voorbeeld:

- Laat $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, dan is
  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$

Opgaven:

Bereken waar mogelijk:

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ (antwoord op http://www.wolframalpha.com)

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

6. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.1.2 scalaire vermenigvuldiging van een matrix

Net als bij de scalaire vermenigvuldiging van een vector kan een matrix met een getal worden vermenigvuldigd door alle elementen van de matrix met dat getal te vermenigvuldigen.

voorbeeld:

- Laat $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ en $c = 3$, dan is
  $\mathbf{C} = 3 \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Opgaven:

Bereken:

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.1.3 vermenigvuldiging van een matrix met een vector

Een matrix $\mathbf{A}$ met dimensie $m \times n$ kun je met een vector $\vec{x}$ met n elementen als volgt vermenigvuldigen:

$$\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \tag{48}$$

Deze vermenigvuldiging noemen we een **martixvermenigvuldiging** van vector $\vec{v}$. Het resultaat is een vector met m elementen. De volgorde in de schrijfwijze is belangrijk $\mathbf{A}\vec{v}$ is niet gelijk aan $\vec{v}\mathbf{A}$. Merk op dat de vermenigvuldiging alleen mogelijk is als het aantal kolommen in $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal elementen ofwel de **dimensie** van de vector $\vec{v}$.

voorbeeld:

- Laat $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan is

$$\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 \\ 5\cdot(-1) + 6\cdot 2 \\ 7\cdot(-1) + 8\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Eigenschappen matrices 1

Voor de verzameling van $m \times n$ matrices gelden voor de tot nu toe behandelde algebrïsche bewerkingen de volgende eigenschappen:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (commutatieve eigenschap)

b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatieve eigenschap)

c) Er is een unieke $m \times n$ matrix die we de nulmatrix $\mathbf{0}$ noemen met de eigenschap $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$. De $\mathbf{0}$ matrix is volledig gevuld met nullen.

d) Voor elke matrix $\mathbf{A}$ is er een unieke $m \times n$ matrix weergegeven als $-\mathbf{A}$ uit gesproken als min $\mathbf{A}$ zodat $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

e) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ voor iedere matrix

f) $(a \cdot b)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$ voor willekeurige getallen a en b en iedere matrix.

g) $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$

h) $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$

i) $\mathbf{A}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathbf{A}\vec{u} + \mathbf{A}\vec{v}$ als $\vec{u}, \vec{v}$ beiden n dimensionale vectoren zijn.

j) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\vec{u}) = \mathbf{A}\vec{u} + \mathbf{B}\vec{u}$ als $\vec{u}$ een n dimensionale vector is.

Opdracht: Bewijs deze eigenschappen

Binnen de verzameling van vierkante $n \times n$ matrices bestaat er een unieke matrix die we de eenheidsmatrix $\mathbf{I}$ noemen waarvoor geldt:

$$\mathbf{I}\vec{u} = \vec{u}$$

als $\vec{u}$ een n dimensionale vector is. De eenheidsmatrix heeft de volgende vorm:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Opgaven:

Bereken:

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. Wat is het verband tussen het inproduct van de vectoren $< \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ en de matrixvermenigvuldiging uit de vorige opgave?

15. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.1.4 een interpretatie van lineaire transformaties

Eerder hebben we gezegd dat er een algebraïsche aanpak is om puntenverzamelingen te kunnen spiegelen, roteren, vergroten en strekken om tot een beeld van die puntenverzameling te komen. Algebraïsch wordt een lineaire afbeelding binnen één vectorruimte van dimensie n (dat wil zeggen origineel en beeld hebben beide dimensie n) gedefinieerd door een vierkante $n \times n$ matrix. We zullen aan de hand van een aantal geogebra applets laten zien wat je in twee dimensies zoal kunt verwachten.

4.1.5 spiegelen:

Er zijn twee elementaire vormen van spiegelen: puntspiegelen in de oorsprong en lijnspiegelen in een lijn door de oorsprong. In de applet spiegelen (7) zijn matrices gegeven voor spiegeling in de oorsprong **A**, spiegeling in de in x-as **B** en spiegeling in de y-as **C**:

$$\mathbf{A}\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \end{pmatrix} \tag{49}$$

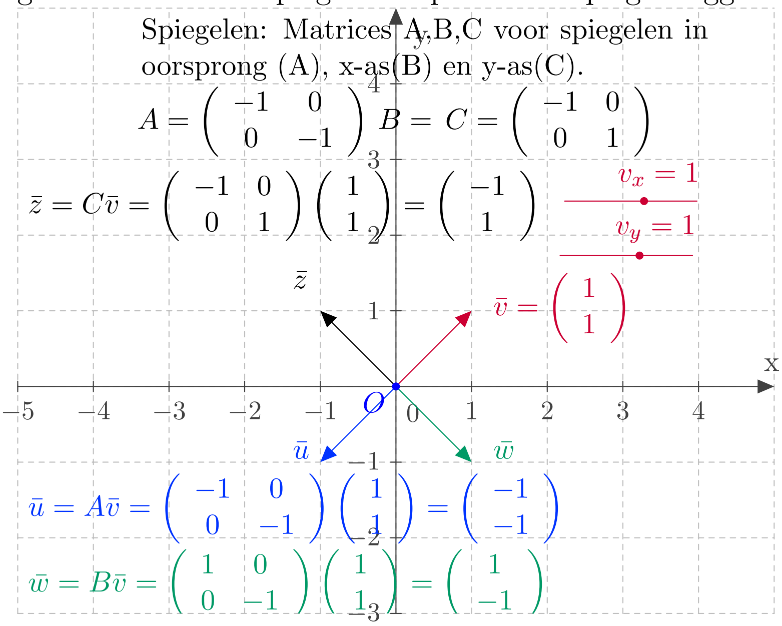
$$\mathbf{B}\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\mathbf{C}\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{51}$$

Opdracht: Wat is het resultaat van deze spiegelingen op het orgineel $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Opdracht: In de applets kun je de coördinaten van de vector $\vec{v}$ veranderen. Doe dat en analyseer de resultaten.

Figure 7: vectoren spiegelen Open vectorspiegelen.ggb



4.1.6 schalen:

De grootte van een vector veranderen kan op veel manieren. De meest eenvoudige schaling is alleen een vergroting van de x en de y coördinaten van een vector met respectievelijk de factoren a_{11} en a_{11}. De bijbehorende matrixvermenigvuldiging met schalings matrix $\mathbf{D}$ is:

$$\mathbf{D}\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_x \\ a_{22}u_y \end{pmatrix} \tag{52}$$

De applet schalen (8) biedt de mogelijkheid om de coördinaten van $\vec{v}$ in de x-richting en y-richting afzonderlijk met een constante te vermenigvuldigen.

Verander de coëfficienten a_{11} en a_{22} en analyseer de resultaten.

4.1.7 roteren:

Opdracht: In de applet eenheidscirkel (9) wordt het punt A over een hoek α gedraaid naar punt E. Lijnstuk OA maakt een hoek β met lijnstuk OB. De coördinaten van A zijn $A = (\cos(\beta), \sin(\beta))$. Laat met goniometrische formules zien dat de coördinaten van E gelijk zijn aan $E = (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta))$

Figure 8: vectoren schalen Open vectorschalen.ggb

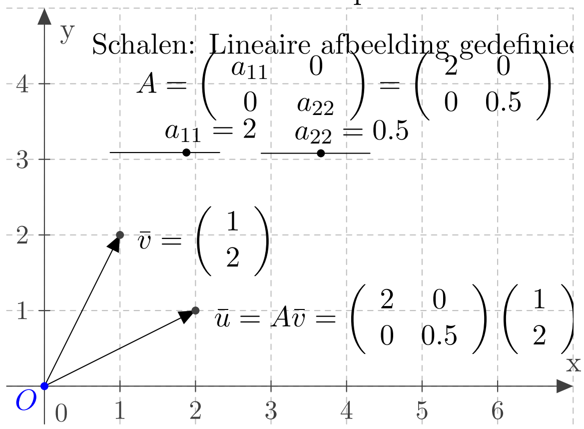
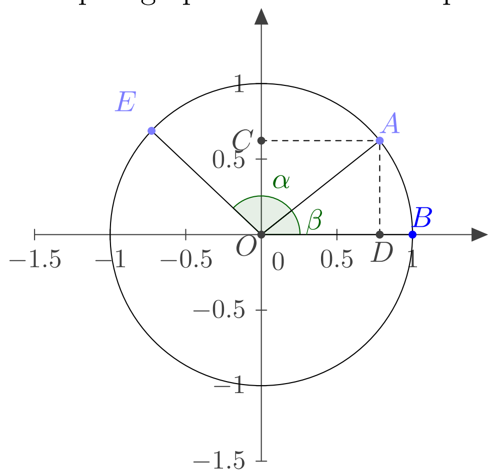


Figure 9: rotatie om oorsprong op eenheidscirkel Open eenheidscirkel.ggb



Een rotatie in om de oorsprong over een hoek α radialen is weergegeven tegen de klok in wordt beschreven door de matrix $\mathbf{R}$:

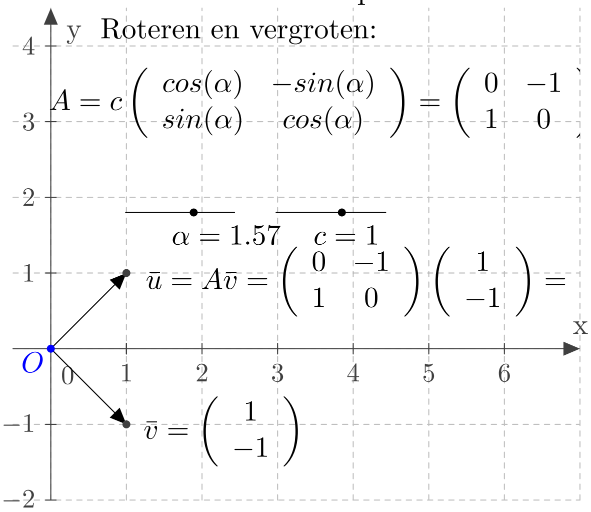
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Opdracht: Laat zien dat punt A uit de vorige opdracht inderdaad met deze vermenigvuldiging op E terecht komt.

Opdracht: In de applet roteren (10) kun je de hoek α voor de transformatie veranderen en je kunt de lengte van de beeldvector met de constante c schalen. Doe dit en analyseer de resultaten.

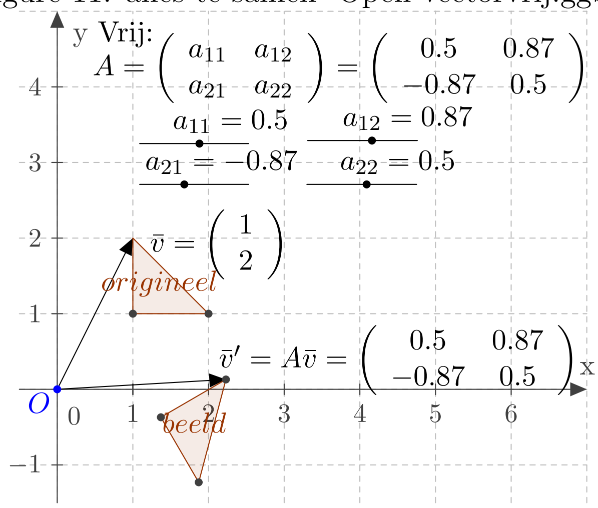
Opdracht: Op wikipedia worden nog een aantal speciale transformaties geboden. Probeer deze eens uit in applet alles te samen (11). Lees eerst onderstaande tekst over samenvoegen van lineaire combinaties. Probeer daarna eens zelf samengestelde transformaties uit te rekenen en te testen in applet 11 vrij uitgaande van de voor-

Figure 10: vectoren roteren Open vectorroteren.ggb



beelden in de bovenstaande applets.

Figure 11: alles te samen Open vectorvrij.ggb



4.1.8 samenvoegen lineaire transformaties

Lineaire transformaties kunnen ook gecombineerd worden. Je kan bijvoorbeeld een vector $\vec{u}$ eerst roteren met een matrix **A**. Dit levert beeldvector $\vec{v}$. Daarna zou je $\vec{v}$ kunnen spiegelen met een matrix **B** met als resultaat vector $\vec{w}$. Dus

$$\begin{cases} \vec{v} = \mathbf{A}\vec{u} \\ \vec{w} = \mathbf{B}\vec{v} \end{cases}$$

Als we nu in de laatste vergelijking $\vec{v}$ vervangen door de berekening van $\vec{v}$ uit $\vec{u}$ dan krijgen we

$$\vec{w} = \mathbf{BA}\vec{u}.$$

Als we iets als $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ zouden kunnen uitrekenen dan zouden we de afbeelding van $\vec{u}$ naar $\vec{w}$ als één lineaire transformatie weergegeven door de matrix $\mathbf{C}$ kunnen zien. Laten we eens in twee dimensies kijken hoe dat werkt.

Laat $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Dan is

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \mathbf{BA}\vec{u} \\
&= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e(ax + by) + f(cx + dy) \\ g(ax + by) + h(cx + dy) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{C}\vec{u}
\end{aligned}$$

Je ziet dat er inderdaad een matrix $\mathbf{C}$ gevonden kan worden. Als je in het product $\mathbf{BA}$ iedere kolom in $\mathbf{A}$ als een vector beschouwt, observeer dan dat iedere kolom in $\mathbf{C}$ verkregen kan worden door $\mathbf{B}$ met de corresponderende kolom in $\mathbf{A}$ te vermenigvuldigen alsof het een matrixvermenigvuldiging met een vector is. Deze observatie geeft dan weer het volgende resultaat: Een matrixvermenigvuldiging $C = AB$ met A een $m \times n$ matrix en B een $s \times t$ matrix is alleen mogelijk als $n = s$ ofwel het aantal kolommen in A moet gelijk zijn aan het aantal rijen in B. De matrix C heeft dan de dimensie $m \times t$.

voorbeeld:

- Laat $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dan is
  $\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

Hier is de volgorde belangrijk, uitzonderingen daar gelaten geldt meestal: $BA \neq AB$.

In ons voorbeeld geldt ook dat $BA \neq AB$:

- $$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Opgaven:

Bereken indien mogelijk:

16. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
20. Het punt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ wordt eerst gedraaid over een hoek van $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Vervolgens wordt de y-coördinaat met een factor $2\sqrt{3}$ vergroot. Bepaal eerst de samengestelde matrix en bereken daarna het beeld van P. Is het beeld van P anders als er eerst vergroot wordt en daarna pas gedraaid?
21. Het punt $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ wordt eerst gespiegeld in de $x-$as vervolgens wordt de y-coördinaat met een factor -1 vermenigvuldigd. Bepaal eerst de samengestelde matrix en bereken daarna het beeld van P. Aan welke twee andere transformaties is deze samengestelde vergelijking identiek?
22. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.2 Eigenschappen van een lineaire transformatie: eigenwaarde, eigenvector en eigenruimte

Opdracht: Gegeven is de matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ en de puntenverzamelingen:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ B &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ C &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Bepaal de beeldpunten van alle punten in de verzamelingen: Wat is het verschil tussen de verzamelingen A of B en C?

Als $\mathbf{A}$ een lineaire transformatie is en $\vec{v}$ een element uit een vectorruimte V dan is er iets speciaals met de vergelijking:

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \tag{53}$$

waarin λ een getal is.

Deze vergelijking heeft altijd de oplossing $\vec{v} = \vec{0}$. Ofwel de oorsprong $\vec{0}$ wordt altijd weer op de oorsprong afgebeeld.

Wat als we de vergelijking niet in $\vec{v}$ willen oplossen maar in λ voor $\vec{v} \neq \vec{0}$?

Het blijkt dat voor een willekeurig gekozen $\vec{v}$ dit niet mogelijk is. Maar er zijn wel combinaties van λ en $\vec{v}$ te vinden die aan de vergelijking voldoen. De meetkundige interpretatie bij het oplossen van een dergelijke vergelijking is dat we op zoek zijn naar deelruimten V_d (lijnen,vlakken,...) van V die zelf ook weer een vectorruimte zijn en die door de transformatie $\mathbf{A}$ onveranderd blijven. De deelruimten gaan dus altijd door de oorsprong. bijvoorbeeld ligt $\vec{v}$ op de lijn m door de oorsprong en ligt hethet beeld $\mathbf{A}\vec{v}$ ook op de lijn m dan zal iedere andere $\vec{u}$ op die lijn ook weer op die lijn worden afgebeeld. Daarnaast zal ieder beeld op die lijn een "vergroting" met factor λ van zijn origineel zijn.

voorbeeld:

- Een voorbeeld in twee dimensies: Gegeven is de transformatie

  $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Deze transformatie is een spiegeling in de x-as waarbij het spiegelbeeld twee keer vergroot wordt. De combinatie $\lambda_1 = 1$ samen met vectoren van de vorm $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ (=x-as) voldoen aan de vergelijking evenals de combinatie $\lambda_2 = -2$ en vectoren van de vorm $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ (=y-as). De x-as en de y-as worden dus op zichzelf afgebeeld.

Opdracht: Overtuig jezelf door de vector $\vec{v}$ in de applet schalen 12 te veranderen. Zijn er voor A uit het voorbeeld nog andere lijnen die door de oorsprong gaan en waarvan het beeld van een vector op die lijn weer op die lijn ligt?

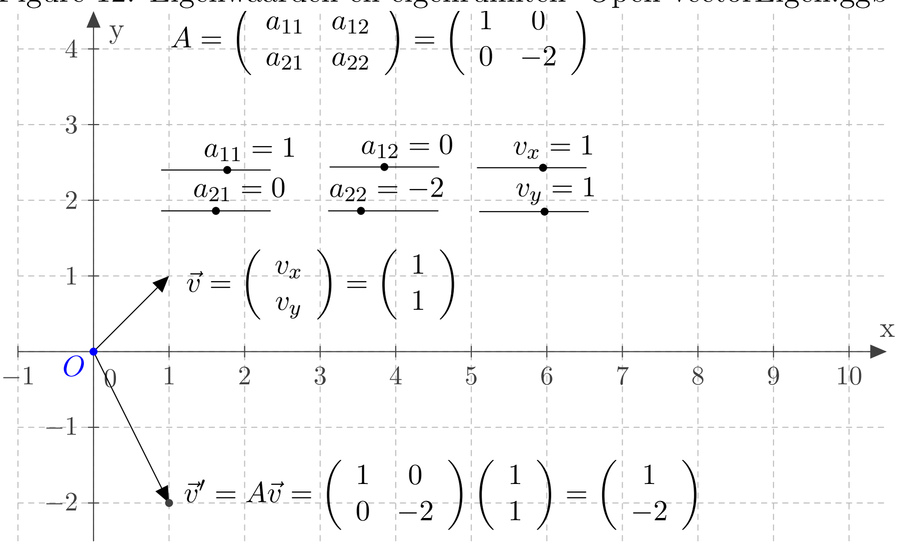
Opdracht: Onderzoek met de applet 12 welke twee lijnen onveranderlijk zijn en hoe groot de schalingsfactoren voor die lijnen zijn voor de transformatie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opdracht: Onderzoek met de applet 12 welke twee lijnen onveranderlijk zijn en hoe groot de schalingsfactoren voor die lijnen zijn voor de transformatie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Figure 12: Eigenwaarden en eigenruimten Open vectorEigen.ggb



De waarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -2$ bij het bovengenoemde voorbeeld noemt men de **eigenwaarden** (karakteristieke waarde) van de matrix uit het voorbeeld ofwel lineaire transformatie. In de deelruimte die op zichzelf wordt afgebeeld noemt men een willekeurige vector een *eigenvector*. De eigenvectoren die bij **verschillende** eigenwaarden horen zijn **lineair onafhankelijk**. Dat wil zeggen dat ze niet in de zelfde onveranderlijke deelruimte liggen. Als bijvoorbeeld twee deelruimten lijnen zijn dan betekent dit dat er geen constante c te vinden is zodanig dat $\vec{v}_1 = c \cdot \vec{v}_2$, ofwel de lijnen vallen niet samen, maar snijden in de oorsprong ($\vec{0}$).

Als in een twee (of n) dimensionale ruimte twee (of n) vectoren onderling onafhankelijk zijn dan kan iedere andere vector in die ruimte worden geschreven als een unieke lineaire combinatie van die twee(of n) vectoren, ofwel

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \;\; ; \;\; \vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n \tag{54}$$

Opdracht: Bewijs deze eigenschap in 2D door a en b op te lossen uit de volgende vergelijking

$$a\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Voor het beeld van $\vec{u}$ geldt dan

$$\mathbf{A}\vec{u} = \mathbf{A}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1\mathbf{A}\vec{v}_1 + c_2\mathbf{A}\vec{v}_2 = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2$$

Ofwel het beeld van $\vec{u}$ gaat met de zelfde coëfficienten c_1 en c_2 over in een lineaire combinatie van de beelden van de eigenvectoren. **Let wel dit gaat alleen op als er alleen net zoveel verschillende eigenwaarden zijn als het aantal rijen van de vierkante matrix. Later gaan we in op het geval dat er minder eigenwaarden zijn.**

4.2.1 eigenwaarde en de karakteristieke vergelijking

Hoe bepaal je nu alle eigenwaarden λ voor een vierkante matrix A en de bijbehorende eigenvectoren? Beschouw weer de vergelijking:

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

waarin λ een getal is.

Deze kan worden herschreven tot

$$\mathbf{A}\vec{v} - \lambda\vec{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\vec{v} = 0,$$

hierin is $\mathbf{I}$ de eenheidsmatrix.

Omdat we op zoek zijn naar oplossingen waarvoor $\vec{v} \neq \vec{0}$ moeten we opzoek naar combinaties λ en $\vec{v}$ waarvoor de vergelijking geldt. Zonder bewijs geven we hier de methode om tot een karakteristieke vergelijking te komen waaruit λ kan worden berekend. Daarvoor moeten we eerst de **determinant** van een vierkante matrix introduceren. We geven eerst een rekenrecept voor twee dimensies. Daarna geven we het recept voor drie dimensies.

Gegeven is de vierkante 2×2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

De **determinant** $\det(\mathbf{A})$ van een 2×2 matrix $\mathbf{A}$ is een getal verkregen door het volgende recept

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{55}$$

voorbeeld:

- Bepaal de determinant van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
  $\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2$.

Gegeven is de vierkante 3×3 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De determinant $\det(\mathbf{A})$ van $\mathbf{A}$ matrix kan als volgt worden berekend:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

voorbeeld:

- Bepaal de determinant van de matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

Opgaven:

Bepaal de exacte waarde van de determinant van de volgende matrices:

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (antwoord op http://www.wolframalpha.com/input/?i={{2,3},{5,8}})

24. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

28. $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & \sqrt{(3)} \\ 2\sqrt{3} & 5\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$

29. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent

Opdracht: Voor het berekenen voor de determinant van vierkant matrices in hogere dimensie verwijzen we je naar wikipedia of Wolfram Mathworld. Daar vind je ook nog andere eigenschappen van determinanten die we hier niet behandelen. Probeer eens de determinant te vinden voor de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Nu terug naar het vinden van de eigenwaarden en eigenvectoren uit de vergelijking

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\vec{v} = 0.$$

Ook hier beginnen we weer in twee dimensies. Laat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dan is

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\, \vec{v} = 0.$$

te schrijven als

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

Er blijkt nu te gelden dat we λ kunnen bepalen door de determinant van $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ gelijk te stellen aan 0. Dit leidt tot de **karakteristieke vergelijking**:

$$\det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

Dit is een kwadratische vergelijking in λ. Een kwadratische vergelijking heeft niet altijd een oplossing als λ een reëel getal zou moeten zijn. Die beperking hoeven we ons echter niet op te leggen. Sterker nog die beperking is zelfs ongewenst. Binnen de verzameling van complexe getallen (zie complexe getallen door Jan van de Craats voor een introductie) heeft een kwadratische vergelijking altijd twee (mogelijk samenvallende) oplossingen λ_1 en λ_2. Hebben we twee eigenwaarden gevonden dan kunnen de bijbehorende eigenvectoren worden verkregen door $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ op te lossen uit: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}))\, \vec{v}_1 = \vec{0}$ en $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}))\, \vec{v}_2 = \vec{0}$.

4.2.2 twee reële eigenwaarden

voorbeeld:

- Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

Hier uit volgt dat $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ de gevraagde eigenvectoren berekenen we nu per eigenwaarde:
$\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$: Los op $(\mathbf{A} - 1\mathbf{I})\, \vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v_{1x} - 2v_{1y} = 0 \\ 3v_{1x} - 2v_{1y} = 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen geven $3v_{1x} = 2v_{1y}$ ofwel $3v_{1x}/2 = v_{1y}$. We kunnen nu een willekeurige x coördinaat kiezen b.v $v_{1x} = 2 \Rightarrow v_{1y} = 3$. Een eigenvector is dan

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_\mathbf{2} = \mathbf{2}$: Los nu op $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{2x} - 2v_{2y} = 0 \\ 3v_{1x} - 3v_{2y} = 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen geven $v_{2x} = v_{2y}$. We kunnen nu een willekeurige x coördinaat kiezen b.v $v_{2x} = 1 \Rightarrow v_{2y} = 1$. Een eigenvector is dan

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectoren op de lijn $y = x$ worden dus met een factor 2 verlengd en vectoren op de lijn $y = 3x/2$ worden precies op de zelfde plek afgebeeld.

Opdracht: Controleer dit in de applet eigenwaarden en eigenruimte 12.

Laat met een berekening zien dat het beeld van $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ gelijk is aan $\vec{u}' = 2 \cdot 1 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot 2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\vec{u}$.

Opgaven:

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren voor de volgende matrices:

30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$
(antwoord op http://www.wolframalpha.com/input/?i={{2,1},{-5,8}})

31. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

32. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

33. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent

4.2.3 twee complexe eigenwaarden

In bovenstaand voorbeeld waren de eigenwaarden reële getallen. Het kan ook zijn dat er twee complexe eigenwaarden zijn. De eigenvectoren zijn dan ook complex. Complexe eigenwaarden horen bij matrices waarin een rotatie aanwezig is. We bekijken weer een voorbeeld.

voorbeeld:

- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren voor de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2 = (\lambda - 2)^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Hier uit volgt dat $\lambda_1 = 2 + i$ en $\lambda_2 = 2 - i$ de gevraagde eigenwaarden zijn De gevraagde eigenvectoren berekenen we weer per eigenwaarde.
$\boldsymbol{\lambda_1 = 2 + i}$: Los nu op $(\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I})\,\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -(1+i)v_{1x} - v_{1y} = 0 \\ 2v_{1x} + (1-i)v_{1y} = 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen geven $(-1-i)v_{1x} = v_{1y}$. We kunnen nu weer een willekeurige y coördinaat kiezen b.v $v_{1x} = 1 \Rightarrow v_{1y} = -1 - i$. Een eigenvector is dan
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 2 - i}$: Los nu op $(\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I})\,\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1+i)v_{2x} - v_{2y} = 0 \\ 2v_{1x} + (i+1)v_{2y} = 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen geven $(-1+i)v_{2x} = v_{2y}$. We kunnen nu een willekeurige y coördinaat kiezen b.v $v_{2x} = 1 \Rightarrow v_{2y} = -1 + i$. Een eigenvector is dan
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \\ -1+i \end{pmatrix}$

Opgaven:

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren voor de volgende matrices:

34. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
(antwoord op http://www.wolframalpha.com/input/?i={{1,5},{-1,3}})

35. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

37. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent

4.2.4 twee samenvallende eigenwaarden

Als laatste is er nog het geval van twee samenvallende eigenwaarden ofwel één reële eigenwaarde met **multipliciteit** twee. Het vinden van twee verschillende onafhankelijke eigenvectoren behoeft dan wat extra uitleg. Bij één reële eigenwaarde kunnen we direct één eigevector $\vec{v}_1$ bepalen. Voor deze eigenvector geldt natuurlijk $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0}$. Het blijkt nu dat voor een eigenwaarde met multipliciteit twee een tweede eigenvector, die lineair onafhankelijk is van $\vec{v}_1$, gevonden kan worden door de vergelijking $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\vec{v}_2 = \vec{0}$ op te lossen. $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\vec{v}_2 = \vec{0}$ is, ook te schrijven is als $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_2\right) = \vec{0}$ ligt $\vec{v}_2$ of in de zelfde deelruimte als $\vec{v}_1$, maar dan zijn de twee eigenvectoren niet onafhankelijk, of $\vec{v}_2$ ligt in de deelruimte die door de matrix $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ wordt afgebeeld op de deelruimte die door $\vec{v}_1$ wordt opgespannen ofwel we kunnen $\vec{v}_2$ oplossen uit:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_2 = \mu\vec{v}_1 \tag{57}$$

Omdat μ slechts een schalingsfactor is en we slechts in een richting zijn geïnteresseerd kan $\mu = 1$ worden gekozen.

Het is nu niet meer zo dat $\vec{u} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2$ door $\mathbf{A}$ wordt afgebeeld op $\vec{u}' = a \cdot \lambda\vec{v}_1 + b \cdot \lambda\vec{v}_2$ maar op

$$\vec{u}' = a \cdot \lambda\vec{v}_1 + b \cdot A\vec{v}_2 = a \cdot \lambda\vec{v}_1 + b \cdot (\lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_1) =$$

$$(a \cdot \lambda + b)\vec{v}_1 + b \cdot \lambda\vec{v}_2 \tag{58}$$

voorbeeld:

- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren voor de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Hier uit volgt dat $\lambda = 2$ is een eigenwaarde met multipliciteit twee.
$\lambda = \mathbf{2}$: Los nu op $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{1x} - v_{1y} = 0 \\ v_{1x} + v_{1y} = 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen geven $v_{1x} = -v_{1y}$. We kunnen nu weer een willekeurige y coördinaat kiezen b.v $v_{1y} = 1 \Rightarrow v_{1x} = -1$. Een eigenvector is dan
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voor de tweede eigenvector lossen we op: $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{2x} - v_{2y} = -1 \\ v_{2x} + v_{2y} = 1 \end{cases}$$

Kies $v_{2x} = 1$ dan is $v_{2y} = 0$ dan is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Merk op dat inderdaad $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_1$ onderling onafhankelijk zijn.

Opgaven:

Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren voor de volgende matrices:

38. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

39. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

40. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & -3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

41. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

42. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

43. Voor welke waarden van a heeft de matrix $\mathbf{A}$ reële eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$.

44. Voor welke waarden van a heeft de matrix $\mathbf{A}$ twee reële eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ a & 3a \end{pmatrix}$.

45. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

4.2.5 hogere dimensie

In drie dimensies kunnen we net als in twee dimensies een karakteristieke vergelijking opstellen. Namelijk door de determinant van $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ gelijk aan nul te stellen.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - (a_{11} - \lambda)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Dit is een derdegraadsvergelijking die drie, mogelijk samenvallende, oplossingen heeft. Hieronder is het algemene recept te vinden voor het algebraïsch oplossen van een derdegraadsvergelijking. Voor hogeregraadsvergelijkingen zijn er geen algemene oplossingsformules. Sterker nog het is bewezen dat die er ook niet kunnen zijn. Omdat de theorie uit deze sectie veel wordt in de analyse van continue dynamische systemen die in de praktijk vaker in hogere dimensies worden toegepast is het nut van het recept voor derdegraadsvergelijking vrij klein en worden vergelijkingen numeriek opgelost.

Intermezzo:
De oplossingen voor een vergelijking $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ in $\mathbb{C}$ zijn

$\lambda = -\frac{1}{3}a + T$
$\vee$
$\lambda = -\frac{1}{3}a + \frac{-T+i\sqrt{3T^2+4p}}{2}$
$\vee$
$\lambda = -\frac{1}{3}a + \frac{-T-i\sqrt{3T^2+4p}}{2}$

Hierbij is $T = \sqrt[3]{T_1} + \sqrt[3]{T_2}$,
$T_1 = \frac{1}{2}q + \sqrt{r}$;
$T_2 = \frac{1}{2}q - \sqrt{r}$;
$p = b - \frac{1}{3}a^2$;
$q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$;
$r = \left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3$.

voorbeeld:

- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren voor de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  De karakteristieke vergelijking voor de matrix $\mathbf{A}$ is:
  $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)(-1)1 =$
  $(1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = 0$
  Deze vergelijking heeft als oplossingen:
  $(1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$
  $\vee$
  $(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1+i \ \vee \ \lambda = 1-i$
  $\lambda_1 = 1$: De eigenvector $\vec{v}_1$ voor deze eigenwaarde lossen we op uit
  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = 0 \\ -v_{1z} & = 0 \\ v_{1y} & = 0 \end{cases}.$
  We mogen v_{1x} vrij kiezen. De vector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ is dus een eigenvector.
  $\lambda_1 = 1+i$: De eigenvector $\vec{v}_2$ voor deze eigenwaarde lossen we op uit
  $(\mathbf{A}-(1+i)\mathbf{I})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -iv_{2x} & = 0 \\ -iv_{2y} - v_{2z} & = 0 \\ v_{2y} - iv_{2z} & = 0 \end{cases}.$
  Dus $v_{2x} = 0$ en de laatste twee vergelijkingen leveren $v_{2y} = iv_{2z}$. Kiezen we $v_{2z} = 1$ dan is de vector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector.
  $\lambda_1 = 1-i$: De eigenvector $\vec{v}_2$ voor deze eigenwaarde lossen we op uit

$$(\mathbf{A}-(1+i)\mathbf{I})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} iv_{3x} & = 0 \\ iv_{3y} - v_{3z} & = 0 \\ v_{3y} + iv_{3z} & = 0 \end{cases}.$$

Dus $v_{3x} = 0$ en de laatste twee vergelijkingen leveren $v_{3y} = -iv_{3z}$. Kiezen we $v_{3z} = 1$ dan is de vector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector.

Opgaven:

Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren voor de volgende matrices:

46. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

47. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2.6 inverse matrix

Gegeven is de twee dimensionale transformatie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Passen we deze tansformatie toe op $\vec{x}$ dan krijgen we het beeld $\vec{x}' = A\vec{x}$. Nemen we als startpunt $\vec{x}'$ dan is er meestal ook een transformatie die als beeld $\vec{x}$ oplevert. Deze transformatie noemen we de inverse van A en wordt aangegeven met A^{-1}. Pas je eerst A toe op $\vec{x}$ en vervolgens A^{-1} dan ben je weer terug in de oorspronkelijke toestand dus: $A^{-1}A\vec{x} = \vec{x}$, zodat $A^{-1}A$ gelijk moet zijn aan de eenheidsmatrix I.

De inverse matrix A^{-1} kun je uit A als volgt bepalen.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{60}$$

Het mag nu duidelijk zijn dat de voorwaarde van het bestaan van A^{-1} is dat $det(A)$ niet gelijk aan 0 mag zijn.

Opdracht: Toon met een berekening aan dat inderdaad geldt $A^{-1}A = I$.

Opdracht: Geef een meetkundige betekenis aan de voorwaarde $det(A) \neq 0$.

voorbeeld:

- Bepaal de inverse van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

  Antwoord: $A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Opgaven:

48. Bepaal exact de inverse (indien mogelijk) van de matrices:

    (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

    (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

    (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

49. Voor welke exacte waarden van a hebben de volgende matrices geen inverse?

    (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ 8 & a \end{pmatrix}$.

    (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a^2 & a \end{pmatrix}$.

    (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 9 \end{pmatrix}$.

50. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

In hogere dimensies is het berekenen van de inverse (hoewel in essentie het zelfde recept geldt) een stuk ingewikkelder. We zullen het algemene recept voor een $n \times n$ matrix geven en het voor een 3×3 matrix handmatig doen. Computers kunnen dit echt veel sneller (niet noodzakelijkerwijs beter!)

Gegeven is de $n \times n$ $(n \geq 2)$ matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

De inverse van deze matrix is gegeven als

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$$

$adj(\mathbf{A})$ noemt men de **geadjugeerde matrix** van $\mathbf{A}$. Dit is ook een $n \times n$ matrix waarvan de elementen $adj(\mathbf{A})_{ij}$ als volgt worden berekend:

$$adj(\mathbf{A})_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

M_{ji} noemt men een **minor** van de matrix $\mathbf{A}$. Dit is de determinant van een $(n-1)\times(n-1)$ matrix die men krijgt door de j-de rij en i-de kolom uit $\mathbf{A}$ weg te laten.

voorbeeld:

- Tijd voor een voorbeeld. Bepaal de inverse van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

  Antwoord: Gebruik de definities voor de determinant van de 2D (55) en 3D (56) matrices.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 20 \end{aligned}$$

  De volgende stap is het berekenen van alle minoren en de daaruitvolgende elementen van $adj(A)$. In de bovenstaande berekening hebben we al de minoren $M_{11} = 4$, $M_{12} = 8$ en $M_{13} = 4$. Op de zelfde wijze berekenen we de overige minoren:

$$\begin{aligned} M_{11} &= 4 \Rightarrow adj(A)_{11} = (-1)^{(1+1)}(4) = 4 \\ M_{12} &= 8 \Rightarrow adj(A)_{21} = (-1)^{(2+1)}(8) = -8 \\ M_{13} &= 4 \Rightarrow adj(A)_{31} = (-1)^{(3+1)}(4) = 4 \\ M_{21} &= \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -9 \Rightarrow adj(A)_{12} = (-1)^{(1+2)}(-9) = 9 \\ M_{22} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 7 \Rightarrow adj(A)_{22} = (-1)^{(2+2)}(7) = 7 \\ M_{23} &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow adj(A)_{32} = (-1)^{(3+2)}(1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{31} &= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -7 \Rightarrow adj(A)_{13} = (-1)^{(1+3)}(-7) = -7 \\
M_{32} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow adj(A)_{23} = (-1)^{(2+3)}(1) = -1 \\
M_{33} &= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow adj(A)_{33} = (-1)^{(3+3)}(3) = 3
\end{aligned}$$

Zodat $\mathbf{A}^{-1}$ gelijk is aan

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & 9 & -7 \\ -8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Laat zien dat inderdaad $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I$

Opgaven:

51. Bepaal exact de inverse (indien mogelijk) van de matrices:

    (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -7 \\ -8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

    (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

    (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (d) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

52. Voor welke exacte waarden van a heeft de volgende matrix geen inverse? $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$

53. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

54. Analyseer het oppervlak van het beeld $V' = \mathbf{A}V$ van vierkant

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in combinatie met de waarde van de determinant van de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

55. Beschouw de inhoud van het beeld $K' = \mathbf{A}K$ vanvan kubus

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in combinatie met de waarde van de determinant van de matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

4.3 Praktische betekenis van eigenwaarden en eigenvectoren

We hebben eerder gezien dat vector $\vec{x}$ in een twee dimensionale ruimte kan worden geschreven als een unieke combinatie van twee willekeurige onafhankelijke vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ ($\vec{u} \neq a \cdot \vec{v}$).

$$\vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

In een n-dimensionale ruimte kan iedere vector $\vec{x}$ in als een combinatie van n willekeurige onafhankelijke vectoren.

voorbeeld:

- Gegeven zijn de vectoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bepaal de waarden a en b zodat $\vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.
  Oplossing:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 4 & = & a-b \\ 5 & = & 2a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 4 & = & a-b \\ 9 & = & 3a \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} b & = & -1 \\ a & = & 3 \end{pmatrix}$$

Dus $\vec{x} = 3 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$

Als een transformatie in n dimensies weergegeven door matrix $\mathbf{A}$ n verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, dan zijn er n bijbehorende onafhankelijke eigenvectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$. Een vector $\vec{x}$ in deze ruimte kan dan worden geschreven als een combinatie van deze eigenvectoren:

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots c_n\vec{v}_n$$

Stelling: Zonder bewijs: Als je herhaald (n keer) de zelfde matrix A toepast op een beginpunt $\vec{x}$ waarvoor geldt dat $\vec{x} = a \cdot \vec{v}$ waarin $\vec{v}$ een eigenvector is, dan is het eindresultaat de vector $\vec{Q} = A^n\vec{P} = A \cdots A\vec{P} = a\lambda^n\vec{P}$.

Opdracht: Bewijs deze stelling.

Conclusie: Omdat iedere vector $\vec{x}$ in een n dimensionale ruimte kan worden geschreven als een combinatie van de eigenvectoren $\vec{x} = \vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots c_n\vec{v}_n$ van een matrix A is eindresultaat de vector $\vec{x}_m = A^m\vec{x} = A \cdots A\vec{x} = \Sigma_{i=1}^{n} c_i\lambda_i^m\vec{v}_i$.

Opdracht: Bewijs deze conclusie.

Voorbeeld:

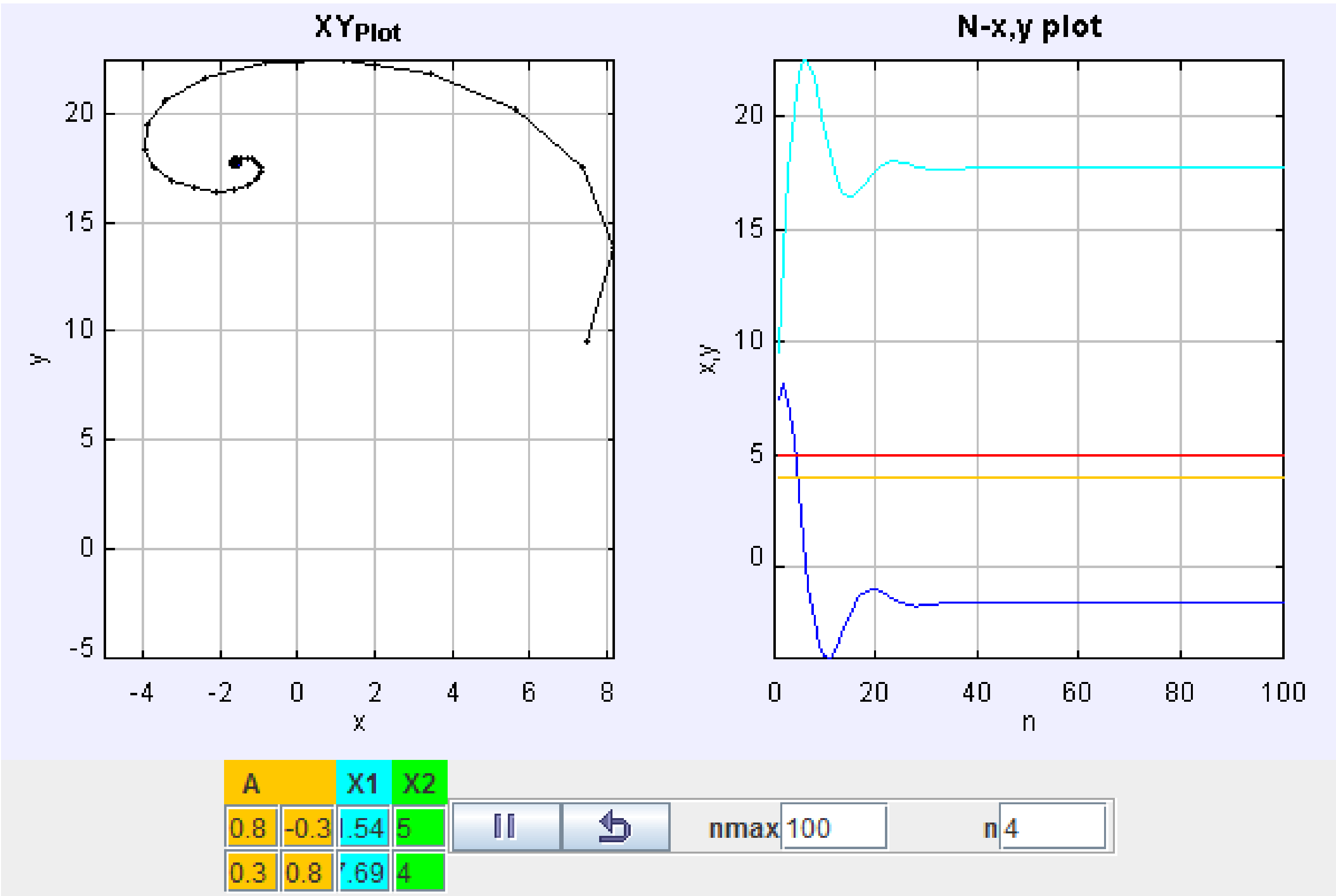
- Bepaal de directe formule $\vec{Q}_n$ voor de reeks $\vec{Q}_n = A\vec{Q}_{n-1}$ met $\vec{Q}_0 = \vec{P}$ waarin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
  Oplossing: Merk eerst op dat het hier om een meetkundige reeks gaat. Dus $\vec{Q}_n = A^n\vec{P}$
  De matrix is in een eerder voorbeeld geanalyseerd en heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ met eigenvectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  In dit geval is het eenvoudig in te zien dat $\vec{P} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2$
  De gevraagde directe formule is dus $\vec{Q}_n = 1 \cdot 1^n\vec{v}_1 + 1 \cdot 2^n\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conclusie: Voor n naar oneindig komt $\vec{Q}$ voor willekeurige $\vec{P}$ steeds dichter bij de ruimte te liggen die wordt opgespannen door de eigenvector waarvoor $|\lambda|$ het grootst is. Als voor alle eigenwaarden van matrix A geldt $|\lambda| \leq 1$. Dan gaat $A^n\vec{P} \to \vec{0}$ voor $n \to \infty$

Opdracht: Bewijs deze conclusie.

4.3.1 lineaire recurrente betrekking van de eerste orde

Figure 13: Lineaire recurrente betrekking van de eerste orde Open ejs/Trans2dandverp.html



Gegeven is reeks $\vec{u}_n = A\vec{u}_{n-1} + \vec{b}$. Het evenwicht van deze reeks wordt als volgt verkregen:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= A\vec{u} + \vec{b} \Rightarrow \\ \vec{u} - A\vec{u} &= \vec{b} \Rightarrow \\ (I - A)\vec{u} &= \vec{b} \Rightarrow \\ \vec{u} &= (I - A)^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$

Dit evenwicht kan alleen bestaan als $\det(I - A) \neq 0$. Het evenwicht is stabiel als voor alle eigenwaarden van matrix A geldt $|\lambda| \leq 1$. Als dit niet het geval is dan is het evenwicht niet stabiel.

voorbeeld:

- Gegeven is de reeks u gegeven door de recursieve formule $\vec{u}_n = \mathbf{A}\vec{u}_{n-1} + \vec{b}$ met $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bepaal exact het evenwicht en de stabiliteit van dit evenwicht.

  Oplossing:

  De eigenwaarden voor $\mathbf{A}$ komen uit $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Dit geeft de karakteristieke vergelijking:

  $$\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0.$$

  Deze heeft als oplossingen $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ en $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. De absolute waarden van deze eigenwaarden zijn kleiner dan 1 dus een eventueel evenwicht is stabiel.

  $$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} - -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{8}{5}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Het evenwicht is dan

  $$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{52}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

De lineaire eerste orde differentievergelijking in een dimensie
$u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met $u_0 = u_0$
is om te zetten tot de directe formule
$u_n = u_0 \cdot a^n + \frac{b}{1-a}(1 - a^n)$
(zie o.a. math4all voor een afleiding). Dit zelfde kunnen we doen voor lineaire eerste orde differentie vergelijking in hogere dimensie.

Opdracht: Druk de eerste 5 termen van de reeks uit in $\vec{u}_0, \mathbf{A}$ en $\vec{b}$

We herhalen de opdracht met een willekeurige $\vec{u}_0, \mathbf{A}$ en $\vec{b}$ voor de reeks $\vec{u}_n = \mathbf{A}\vec{u}_{n-1} + \vec{b}$ in een m dimensionale ruimte. De m eigenwaarden bij matrix A noemen we λ_i; $i = 1, 2, \cdots m$ met de bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}_i$; $i = 1, 2, \cdots m$'. De vectoren $\vec{b}$ en $\vec{u}_0$ kunnen we schrijven als de lineaire combinaties

$$\vec{b} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m \tag{61}$$

en

$$\vec{u}_0 = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_m\vec{v}_m \tag{62}$$

lineaire eerste orde differentie vergelijking in een dimensie is dan:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_0 &= \vec{u}_0 \\
\vec{u}_1 &= \mathbf{A}\vec{u}_0 + \vec{b} \\
\vec{u}_2 &= \mathbf{A}\vec{u}_1 + \vec{b} = \mathbf{A}^2\vec{u}_0 + \mathbf{A}\vec{b} + \vec{b} \\
\vec{u}_3 &= \mathbf{A}\vec{u}_2 + \vec{b} = \mathbf{A}^3\vec{u}_0 + \mathbf{A}^2\vec{b} + \mathbf{A}\vec{b} + \vec{b} \\
&\vdots \\
\vec{u}_n &= \mathbf{A}^n\vec{u}_0 + \mathbf{A}^{n-1}\vec{b} + \mathbf{A}\vec{b} + \vec{b} = \mathbf{A}^n\vec{u}_0 + \Sigma_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^i\vec{b}
\end{aligned} \tag{63}$$

De som $\Sigma_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^i\vec{b}$ is de som van de eerste n termen van de meetkundige rij $\vec{v}_n = \mathbf{A}\vec{v}_{n-1}$ met $\vec{v}_0 = \vec{b}$.

Laat

$$S_n = \vec{b} + \mathbf{A}\vec{b} + \cdots \mathbf{A}^n\vec{b}$$

en

$$\mathbf{A}S_n = \mathbf{A}\vec{b} + \mathbf{A}^2\vec{b} + \cdots + \mathbf{A}^{n+1}\vec{b}$$

Dan is (gebruik ook 61)

$$\begin{aligned}
&S_n - \mathbf{A}S_n = \vec{b} - \mathbf{A}^{n+1}\vec{b} \Rightarrow \\
&(I - A)S_n = \vec{b} - \mathbf{A}^{n+1}\vec{b} \Rightarrow \\
&S_n = (I - A)^{-1}(\vec{b} - \mathbf{A}^{n+1}\vec{b}) = \\
&S_n = (I - A)^{-1}(c_1(1 - \lambda_1^{n+1})\vec{v}_1 + c_2(1 - \lambda_2^{n+1})\vec{v}_2) + \cdots c_m(1 - \lambda_m^{n+1})\vec{v}_m)
\end{aligned}$$

Maken we gebruik van dit resultaat en van (62) dan wordt vergelijking 63

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_n &= \mathbf{A}^n \vec{u}_0 + \\
&\quad (I-A)^{-1}(c_1(1-\lambda_1^n)\vec{v}_1 + c_2(1-\lambda_2^n)\vec{v}_2) + \cdots + c_m(1-\lambda_m^n)\vec{v}_m) \\
&= d_1\lambda_1^n\vec{v}_1 + d_2\lambda_2^n\vec{v}_2 + \cdots d_m\lambda_m^n\vec{v}_m + \\
&\quad (I-A)^{-1}(c_1(1-\lambda_1^n)\vec{v}_1 + c_2(1-\lambda_2^n)\vec{v}_2) + \cdots + c_m(1-\lambda_m^n)\vec{v}_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_i\lambda_i^n\vec{v}_i + (I-A)^{-1}(c_i(1-\lambda_i^n)\vec{v}_i) \qquad (64)
\end{aligned}
$$

voorbeeld:

- Bepaal het evenwicht en de stabiliteit van dit evenwicht en geef de directe formule voor de volgende reeks:

  $$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \vec{u}_{n-1} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  met

  $$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

  Eerst rekenen we het evenwicht $\tilde{u}$ uit:

  $$
  \begin{aligned}
  \tilde{u} &= (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
  &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
  &= \frac{1}{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - -\frac{1}{8}\cdot -\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
  &= \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
  &= \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix}
  \end{aligned}
  $$

  Vervolgens bepalen we de eigenwaarden van A:

  $$
  \begin{aligned}
  0 &= \det(A-\lambda I) \Rightarrow \\
  &= \begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{4}-\lambda \end{vmatrix}
  \end{aligned}
  $$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{5}{4}-\lambda\right)-\frac{3}{16}\\
&= \lambda^2-2\lambda+\frac{12}{16}\\
&= (\lambda-1)^2-1+\frac{12}{16}\\
&= (\lambda-1)^2-\frac{1}{4}\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\lambda_1-1=\frac{1}{2}\wedge\lambda_2-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\lambda_1=1\frac{1}{2}\wedge\lambda_2=\frac{1}{2}$$

Er is één eigenwaarde > 1. Dit systeem is dus instabiel.

Eigenvectoren:

$\lambda_1 = \frac{3}{2}$:

$$(A-\frac{3}{2}\cdot I)\vec{v}_1=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0}\Rightarrow$$

$\frac{1}{8}v_{1x}-\frac{1}{4}v_{1y}=0\Rightarrow$
$v_{1x}=2v_{1y}=0\Rightarrow$
$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$:

$$(A-\frac{1}{2}\cdot I)\vec{v}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\vec{v}_2=\vec{0}\Rightarrow$$

$\frac{1}{8}v_{2x}+\frac{3}{4}v_{2y}=0\Rightarrow$
$v_{2x}=6v_{2y}=0\Rightarrow$
$\vec{v}_2=\begin{pmatrix} 6 \\ 1\end{pmatrix}$

Nu is

$$\vec{u}_0=\begin{pmatrix} 3 \\ 10\end{pmatrix}=d_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix} 6 \\ 1\end{pmatrix}=2\vec{v}_1+1\vec{v}_2$$

en

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 6c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

Dit systeem oplossen levert:

$$c_1 = \frac{5}{2} \wedge c_2 = -\frac{1}{2}$$

Invullen in (64) geeft de directe formule:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_n &= \sum_{i=1}^{2} d_i \lambda_i^n \vec{v}_i + (I - A)^{-1}(c_i(1 - \lambda_i^n)\vec{v}_i) \\
&= 2\left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \frac{5}{2}(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
&\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \frac{-1}{2}(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \\
&\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Opgaven:

Bepaal het evenwicht en de stabiliteit van dit evenwicht en geef de directe formule voor de volgende reeksen:

56. $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6\frac{3}{16} & 2 \end{pmatrix} \vec{u}_{n-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ met $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

57. $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \vec{u}_{n-1} + \begin{pmatrix} 13 \\ 26 \end{pmatrix}$ met $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

58. *Leslie matrices:* Gebruik je docent. Het leven van een fictief insect vatten we samen in twee stadia: larve en adult. Larven worden gemaakt door adulten en moeten overleven tot adult. Laat x het aantal larven per vierkante meter grondoppervlak zijn en y het aantal adulten per vierkante meter grondoppervlak. We kijken iedere dag naar de populatie. De kans dat een larve een dag

overleeft en de volgende dag nog larve is is 50% en de kans dat een larve adult wordt is 10%. Een adult overleeft met een kans van 60% d is het aantal nieuwe larve per dag per adult.

(a) Leg uit waarom de volgende lineaire recurrente betrekking als dagelijks model gebruikt zou kunnen worden:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & d \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

met begin conditie $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(b) kies $d = 3$ en neem $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Toon algebraïsch aan dat de populatie groeit en bepaal de uiteindelijke verhouding van larven t.o.v. adulten.

(c) Bereken algebraïsch hoe groot het aantal nakomelingen per dag per adult minstens moet zijn om de populatie te laten groeien?

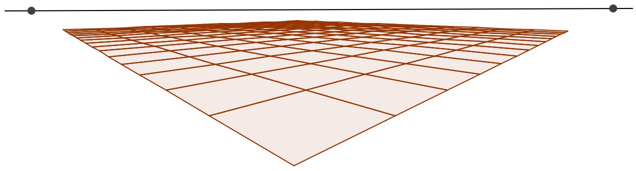
(d) Neem weer $d = 3$. Vissers vissen met de larven van dit insect en willen per dag 10 larven per vierkante meter oogsten. Kies een begin conditie volgens de in de vorige opgave berekende verhouding? Hoe groot moet de begin grootte $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ van de populatie zijn om dit mogelijk te maken?

59. Verzin een opgave inclusief uitwerking en geef die aan je docent en medeleerlingen.

5 Projectieve meetkunde

Figure 14: De blik op oneindig

Snijden de spoorstaven?



Een vloer van gelijke tegels Open tegelvloer.ggb

In de euclidische ruimte zoals we die in de vorige hoofdstukken hebben beschouwd snijden evenwijdige lijnen elkaar nooit. Kijken wij als mens naar twee evenwijdige lijnen, bijvoorbeeld de spoorbaan in de foto in figuur 14, dan lijken de rails elkaar op de horizon te snijden Het spoor lijkt steeds te smaller worden terwijl de trein er toch echt overal over kan rijden.

De term projectieve meetkunde (projective geometry) is het vakgebied binnen de wiskunde dat zich met deze problematiek bezighoud. Aan de hand van figuur 15 definiëren we een aantal begrippen. In de rechter foto zien we hoe de opname in de linker foto is gemaakt. De tafel met de cd's er op noemen we het *origineel*. De lens van de camera noemen we het *kijkpunt* of oog. Het beeldscherm toont ons het beeld ofwel *tafereel* zoals dat door de lens is geprojecteerd op de beeldchip in de camera. De projectie van uit het kijkpunt op het beeldscherm noemt men een *centrale projectie*

Opgaven:

1. Figuur 16 refereert naar opgave "horizon 1" in projectievemeetkunde_geogebra.html. Maak deze opgave.
2. Maak daar ook opgave "horizon 2" en "horizon 3".

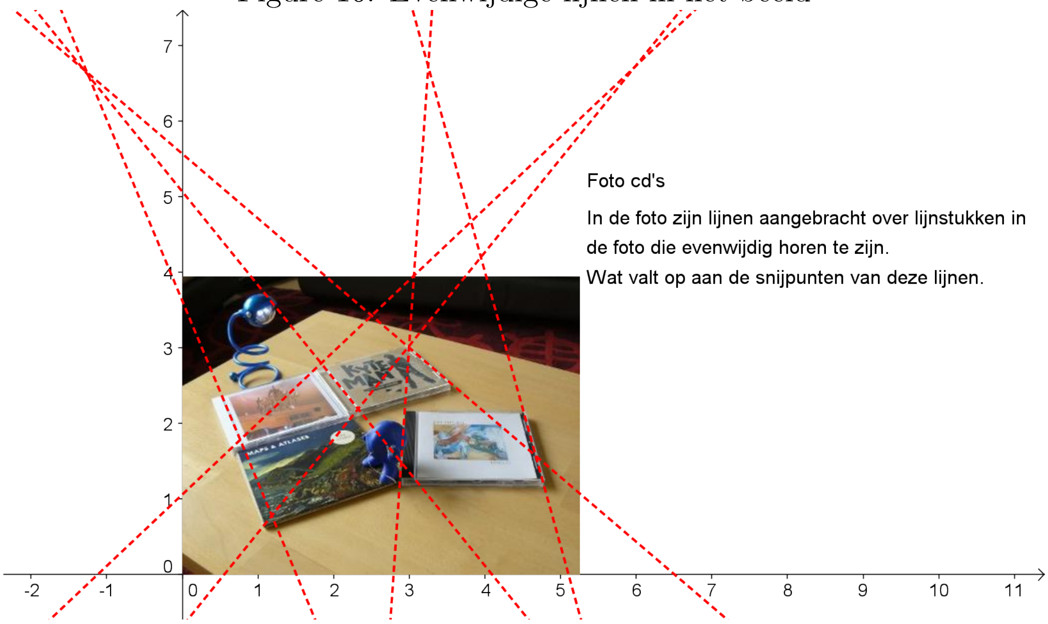
In de opgaven heb je de volgende eigenschappen van centrale projecties in een driedimensionale gevonden:

1. Evenwijdige lijnen in het orgineel vormen snijdende lijnen in het tafereel.

Figure 15: Het beeld van het beeld

Het tafereel De making off.

Figure 16: Evenwijdige lijnen in het beeld

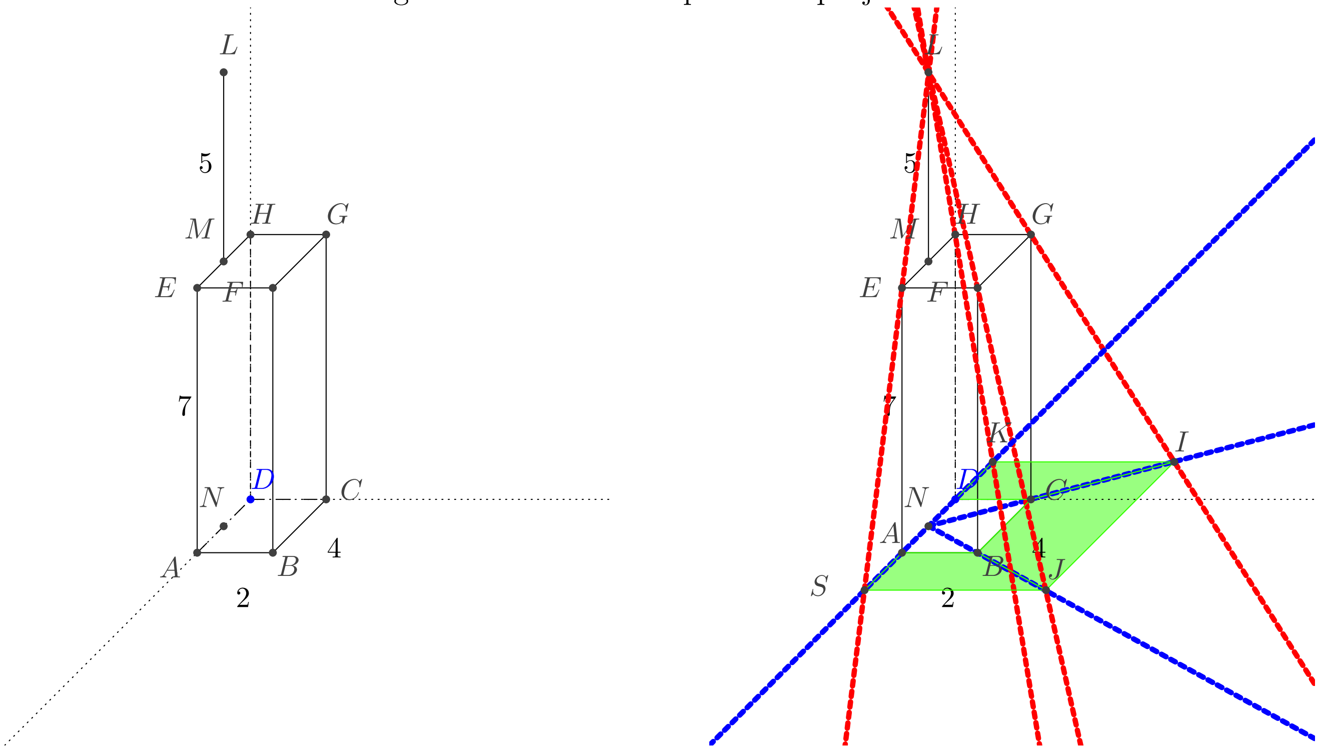


Geogebra applet Open opg_horizon1.ggb

2. De snijpunten van verschillende paren evenwijdige lijnen binnen één vlak in het orgineel liggen op één lijn in het tafereel.

Het snijpunt van twee evenwijdige lijnen afgebeeld in perspectief noemt men het *verdwijnpunt*. De verdwijnpunten van alle paren evenwijdige lijnen in één vlak in het orgineel liggen in de weergave in perpectief allen op één lijn, de zogenaamde *horizon* voor dit vlak. Verschillende vlakken kunnen verschillende horizons hebben.

Figure 17: Schaduw in parallelle projectie



5.1 Schaduw in 3D

In de voorbeelden hierboven is er een oog dat waarneemt. We gaan nu even aan de slag met een licht dat schijnt in een drie dimensionale ruimte. We maken een afbeelding waarin alle evenwijdige lijnen elkaar niet snijden. Dit noemt men een *paralelle projectie*. Dus bij paralelle projecties zijn evenwijdige lijnen in het origineel ook evenwijdig in de projectie.

Opgaven:

3. Maak de opgaven schaduw 1 t/m 4 in projectievemeetkunde_geogebra.html. Lukt het niet gelijk bekijk eerst het voorbeeld in "Uitleg Schaduw" en de uitwerking van de opgave hieronder.

Voorbeeld

Gegeven is de balk ABCD EFGH met $AB = 2$, $AD = 4$ en $AE = 7$ liggend op de grond (zie linker tekening in figuur 17).
De lichtbron bevindt zich op afstand 5 van het bovenvlak recht boven het midden van HE. Bereken algebraïsch de oppervlakte van de schaduw.
Geogebra applet Open voorbeeld_schaduw.ggb

Oplossing:
Noem N midden van AD en teken de lijn NC. Teken vervolgens de lijn LG. Een hoekpunt van de schaduw is nu het snijpunt I van deze twee lijnen. Herhaal dit voor de punten A, B en D om de punten S,J en K te construren. De oppervlakte van de schaduw is de som van de oppervlakten van de trapezia DKIC, CIJB en BJSA.
De oppervlakte kun je op meerder manieren berekenen. De methode hieronder is ook voor minder door zichtelijke figuren te gebruiken.
Algemene methode: Eerst definiëren we een coördinaten systeem in 3D. Voor het gemak (waarom?) kiezen het punt N als oorsprong de x-as leggen we langs AN,de y-as langs N en het midden van BC en de z-as langs NL. We vinden dan de volgende coördinaten voor alle punten:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Om de schaduw in het grondvlak $v = ABCD$ te vinden moeten we de snijpunten van de lijnen $l_1 = LE$, $l_2 = LF$, $l_3 = LG$, $l_4 = LH$ met het grondvlak berekenen. Voor het grondvlak maken we met behulp van het uitprodukt (31) de normaalvector $n_v = \vec{AD} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$
de in dit geval simpele vergelijking

$$v : 0 \cdot x + 0 \cdot y + 8 \cdot z = 0$$

ofwel

$$v : z = 0$$

De vectorvoortelling voor de lijn l_1 is

$$l_1 : P = L + \lambda(E - L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Invullen van l_1 in v geeft $12 - 5\lambda = 0$ ofwel $\lambda = \frac{12}{5}$.
Het snijpunt S van l_1 en v is dan:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{12}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Op gelijke wijze vinden we:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{24}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} \\ -\frac{24}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vervolgens delen we de schaduw op in de driehoeken ASJ, ABJ , BJI, BCI, CIK, CDK en berekenen we met de lengte van een vector (25) en de afstand van een punt tot een lijn (41) de oppervlakte van iedere driehoek, bijvoorbeeld in driehoek ASJ is $O_{ASJ} = \frac{1}{2} \cdot d(A, SJ) \cdot |\vec{SJ}|$. De lijn SJ is $SJ : \vec{Q} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{24}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$d(P, l) = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 - \frac{(0 \cdot \frac{14}{5} + \frac{24}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 0)^2}{\frac{24^2}{5^2}}} = \frac{14}{5}$.
Ook is $|\vec{SJ}| = \frac{24}{5}$.
Zodat de oppervlakte van ASJ gelijk is aan $O_{ASJ} = \frac{1}{2}\frac{14}{5}\frac{24}{5} = \frac{168}{25}$.
Herhaal dit proces en vind dat de oppervlakte van de schaduw gelijk is aan $76\frac{2}{25}$

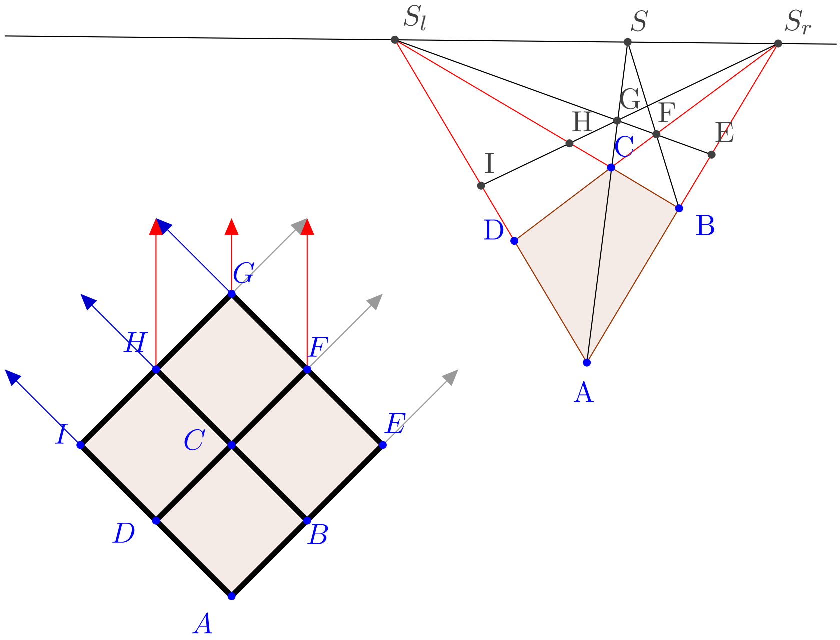
5.2 Tekenen in perspectief

Deze sectie staan constuctie in perspectief centraal. Eerst (5.2.1) wordt uitgelegd hoe een vloer van gelijke parallellogrammen in perspectief kan worden getekend. In het vervolg (5.2.2) leer je hoe je een willekeurige vergroting kan maken.

5.2.1 Verdubbelen

In figuur 18 is links een tegelvloer van vierkante tegels getekend die recht van boven wordt bekeken. Het vierkant $ABCD$ is in de rechterfiguur in perspectief weergegeven. Waarom zijn de lijnen paren AB,CD en AD,BC niet gelijk en evewijdig? Het doel is ook de overige drie tegels in perspectief te tekenen.

Figure 18: Verdubbelen in perspectief



Een vloer van gelijke tegels Open
verdubbelenperspectief.ggb

Dit doel wordt als volgt bereikt. Teken eerst de verdwijnpunten S_l en S_r van repectievelijk de evenwijdige lijnen AD, BC en AB, DC. De verbindingslijn van S_l en S_r vormt de horizon voor het vlak waarin de tegels liggen. Ook alle diagonalen in de linker tekening zijn evenwijdige lijnen in dit vlak en hebben dus ook een verdwijnpunt op dezelfde horizon. Het snijpunt van de lijn AC met de horizon is dit verwijnpunt. Vanuit S kunnen we een lijn door B tekenen die de diagonaal is van tegel $BEFC$. Het snijpunt van de lijn AB met CD is dan het hoekpunt F van de tegel. De lijn door S_l en F snijdt dan de lijnen AB en AC in respectievelijk de punten E en G. Als laatste levert het snijden van de lijn door S_r en G met AD en BC de punten I en H.

Opgaven:

4. Maak de opgaven perspectief 1 t/m 7 in projectievemeetkunde_geogebra.html.

5.2.2 Schalen

Opgaven:

5. Maak de opgaven perspectief 8 t/m .. in projectievemeetkunde_geogebra.html.

5.3 Rekenen in perspectief

5.3.1 De projectieve lijn

5.3.2 Het projetieve vlak

5.3.3 De projetieve ruimte